Sommaire :

Domaine Mathématiques
Mathématiques
Analyse de données
Analyse numérique

Domaine Gestion Droit Economie
Gestion financière et marketing
Économie et droit de l'entreprise

Domaine Informatique
Initiation Unix
Algorithmique et programmation
Architecture matérielle et logicielle d'un ordinateur
Projet informatique

Domaine Réseaux
Introduction au monde de la télécommunication
Réseaux de données
Files d'attente
Introduction aux réseaux mobiles

Domaine Physique
Systèmes et fonctions électroniques
Rayonnement et antennes
Propagation guidée

Domaine Signal et Communications
Probabilités
Signal, outils et applications

Avant toute chose :

Ceci est une version manuscrite de la PAM 2009 ingé, aussi de nombreux sujets des années antérieurs, des fiches et des éléments de cours sont accessibles depuis la rubrique « Pougne » de www.osmoz2009.com

Voiloù,

Merci à celles et ceux qui ont bossé sur cette PAM,

Et bon courage à toi, nainA qui t'apprête aussi à bosser dessus

(ou pas)…

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MAT3001
DURÉE : 3heures — DATE : 18 Janvier 2008
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE I:

1. Calculer les pôles de la fonction $\cosh z$.

2. Calculer l'intégrale définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ par:

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\cosh z} dz \qquad (1)$$

où C est le contour fermé par le rectangle dont les sommets se trouvent aux points $(-R, 0), (+R, 0), (+R, i\pi)$, et$(-R, i\pi)$ dans $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{R}$ est tel que $|a| < 1$.

3. Utiliser le calcul de l'intégrale (1) pour prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

EXERCICE II:

Soit $\mathcal{H}$ l'espace préhilbertien séparable des polynômes en $x \in \mathbb{C}$ à valeurs complexes, muni du produit scalaire:

$$< f, g >= \int_0^{+\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x} dx.$$

1. Montrer que l'opérateur linéaire défini par:

$$\mathcal{L} := x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx},$$

est auto-adjoint dans $\mathcal{H}$.

2. On rappelle que les vecteurs propres de $\mathcal{L}$ sont des polynômes donnés par la formule:

$$l_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Calculer $l_n(x)$ et la valeur propre λ_n correspondante.

3. Montrer que pour tout polynôme $Q(x)$ on a:

$$< l_n, Q >= (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} Q^{(n)}(x)\, dx.$$

En déduire $< l_n, l_m >$ et en particulier $\|l_n\|$.

EXERCICE III:

1. Montrer que la solution de léquation $xT = 1$ au sens des distributions est donnée par:

$$T = c\delta + vp\frac{1}{x} \qquad c = \text{Cst}$$

2. Montrer que, Y étant la fonction de Heaviside, $Y' = \delta$ au sens des distributions. Utiliser ce résultat pour calculer la transformation de Fourier de Y.(On pourra utiliser le résultat de la question précédente)

3. Calculer la transformation de Fourier de la fonction $e^{-2\pi|x|}$ et en déduire celle de $\frac{1}{1+x^2}$.

4. Le but de cette question est de calculer la transformation de Fourier de $\arctan x$. On considère la fonction

$$f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi Y(x)$$

qui est impaire et tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$.Montrer que la transformation de Fourier de f peut être écrite comme:

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} (\arctan x - \frac{\pi}{2}) \sin 2\pi\nu x dx.$$

Calculer cette intégrale et en déduire que:

$$\mathcal{F}(\arctan x) = \frac{1}{2i} vp \frac{1}{\nu} + i \frac{1 - e^{-2\pi|\nu|}}{2\nu}.$$

5. Vérifier le résultat obtenu par dérivation.

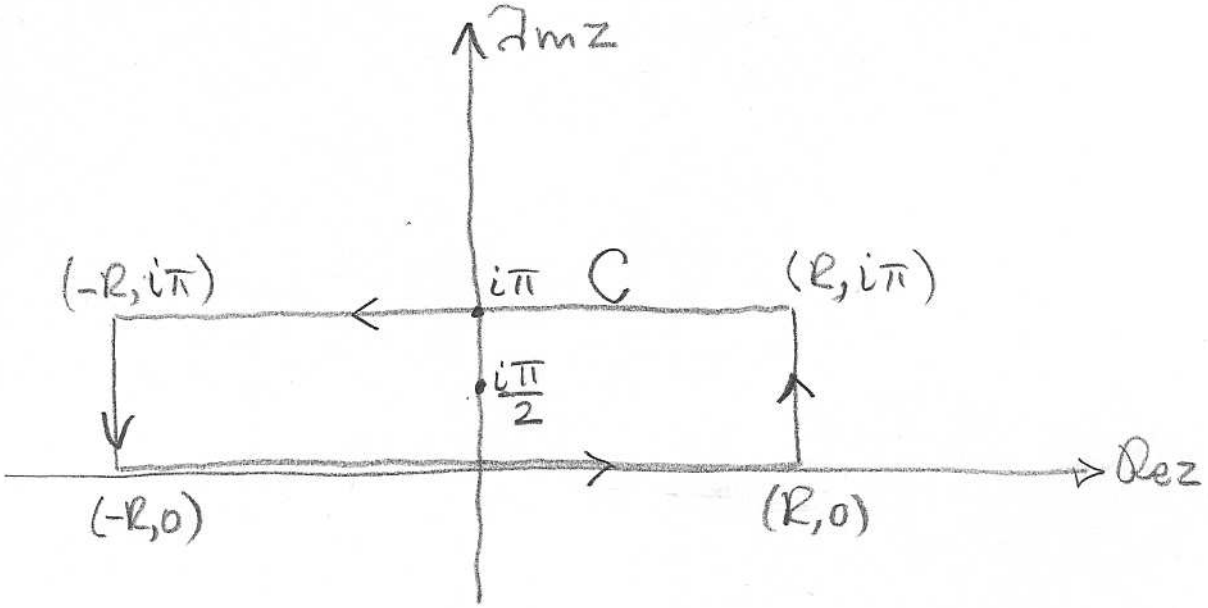
EXERCICE I:

1) $Ch z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0$

$\Leftrightarrow e^{2z} = -1$

$\Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\pi}{2} i \quad n \in \mathbb{Z}.$

2)



Visiblement le seul pôle contenu dans C est $z = i\frac{\pi}{2}$, où le résidu se calcule par la formule

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}; i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f(i\frac{\pi}{2})}{g'(i\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{Sh\, i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{i \sin\frac{\pi}{2}} = -i\, e^{ai\frac{\pi}{2}} \qquad (|a|<1)$$

(Cette formule se trouve dans Bayen-Margaria, Tome I, page 55).

Le théorème des résidus nous permet alors d'écrire :

$$\oint_C \frac{e^{az}}{Chz}\,dz = 2\pi i\, Res\left\{\frac{e^{az}}{Chz}\,;\, i\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= 2\pi i\left[-i\,e^{ai\frac{\pi}{2}}\right] = \underline{\underline{2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}}}$$

3) $$\oint_C \frac{e^{az}}{Chz}\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{Chx}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)}\,i\,dy$$

$$+ \int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{Ch(-R+iy)}\,i\,dy$$

Or, $$\int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}e^{i\pi a}}{Chx\,Chi\pi + Shx\,Shi\pi}\,dx$$

$$Chi\pi = \frac{e^{i\pi}+e^{-i\pi}}{2} = Cos\pi = -1$$

$$Shi\pi = \frac{e^{i\pi}-e^{-i\pi}}{2} = i\,Sin\pi = 0$$

Donc : $$\int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}e^{i\pi a}}{Chx}\,dx$$

Pour calculer les deux intégrales par rapport à y, notons que

$$|Ch(R+iy)| = \left| \frac{e^{R+iy} + e^{-(R+iy)}}{2} \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left\{ |e^{R+iy}| - |e^{-(R+iy)}| \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{R} - e^{-R} \right\} \geqslant \frac{1}{4} e^{R} ;$$

donc

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{aR}}{\frac{1}{4}e^{R}} dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\uparrow\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \lim_{R\uparrow\infty} 4\pi e^{(a-1)R} = 0.$$

De la même façon, en notant que

$$|Ch(-R+iy)| \geqslant -\frac{1}{4} e^{R},$$

on pourra déduire que

$$\lim_{R\uparrow\infty} \left| \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{Ch(-R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \lim_{R\uparrow\infty} 4\pi e^{-(a+1)R} = 0.$$

Par conséquent

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\mathrm{Ch}z}\,dz = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{R\uparrow\infty}\left\{\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + e^{ai\pi}\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx\right\}$$

$$\Rightarrow (1+e^{ai\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \frac{2\pi}{e^{ia\frac{\pi}{2}}+e^{-ia\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{\mathrm{Cos}\frac{\pi a}{2}}$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + \int_{0}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Ch}ax}{\mathrm{Ch}x}\,dx$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Ch}ax}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \frac{\pi}{2\,\mathrm{Cos}\frac{\pi a}{2}}}$$

EXERCICE II :

i) $\forall f, g \in \mathcal{H}$: $\langle f, g \rangle := \int_0^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, e^{-x}\, dx$

$$L := x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}$$

En calculant $\langle Lf, g \rangle$ et $\langle f, Lg \rangle$ en faisant deux intégrations par parties pour chacun, on trouve, $\forall f, g \in \mathcal{H}$:

$$\langle Lf, g \rangle - \langle f, Lg \rangle$$

$$= -\int_0^{+\infty} \overline{f'(x)}\, g(x) \left[(xe^{-x})' - (1-x)e^{-x} \right] dx$$

$$- \int_0^{+\infty} \overline{f(x)}\, g'(x) \left[(1-x)e^{-x} - (xe^{-x})' \right] dx$$

$$= -\int_0^{+\infty} \left[\overline{f'(x)}\, g(x) - \overline{f(x)}\, g'(x) \right] \left[(xe^{-x})' - (1-x)e^{-x} \right] dx$$

$= 0$ Donc L est auto-adjoint.

ii) Les vecteurs propres de L sont des polynômes donnés par la formule:

$$\ell_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] \quad n \in \mathbb{N}$$

$$= e^x \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} \right]$$

$$= \cancel{e^x} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} \cancel{e^{-x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{k![(n-k)!]^2} (-1)^{n-k} x^{n-k}$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} + \dots + n!$$

Or $L\ell_n(x) = \left(x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}\right)\ell_n(x) = \lambda_n \ell_n(x)$

Le terme de plus haut degré du premier membre est obtenu par:

$$-x\frac{d}{dx}\ell_n(x) = -x\frac{d}{dx}[(-1)^n x^n] = (-1)^{n+1} n x^n,$$

et celui du second membre : $\lambda_n (-1)^n x^n$.

Nous avons donc: $\boxed{\lambda_n = -n}$.

iii) Soit $Q(x)$ un polynôme quelconque.

Alors: $\langle l_n, Q\rangle = \int_0^\infty e^x [x^n e^{-x}]^{(n)} Q(x) e^{-x} dx$

$\overset{\text{ipp}}{=} \underbrace{[(x^n e^{-x})^{(n-1)} Q(x)]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty (x^n e^{-x})^{(n-1)} Q'(x) dx$

$= \dots = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} Q^{(n)}(x) dx$

(après n ipp)

Si $\deg(Q) < n$, on a $\langle l_n, Q\rangle = 0$.

En particulier,

$\langle l_n, l_m\rangle = 0$ lorsque $n \neq m$.

<u>$m = n$:</u> $\|l_n\|^2 = \langle l_n, (-1)^n x^n\rangle$

$= (-1)^n \langle l_n, x^n\rangle$

$= (-1)^n \int_0^\infty e^x (x e^{-x})^{(n)} x^n e^{-x} dx$

$= \underbrace{\dots}_{\text{ipp: n-fois}} = (-1)^n (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} (x^n)^{(n)} dx$

$= \int_0^\infty x^n e^{-x} n! dx = n! \underbrace{\int_0^\infty x^n e^{-x} dx}_{\Gamma(n+1) = n!}$

$\Rightarrow \boxed{\|l_n\| = n!}$

EXERCICE III :

1) La solution de l'équation $xT = 1$ peut s'écrire comme la somme de :

i) La solution de l'équation sans second membre

$$xT = 0$$

ii) Une solution particulière de l'équation avec second membre $xT = 1$.

Or, nous avons vu en TD que :

$$xT = 0 \iff T = c\delta,$$

c étant une constante et δ étant la distrib^{n} de Dirac. Nous avons vu aussi en TD qu'une solution particulière de l'équation $xT = 1$ est donnée par : $T = vp\frac{1}{x}$.

Par conséquent, la solution générale de l'equation sans second membre $xT = 1$ peut s'écrire comme

$$\boxed{T = c\delta + vp\frac{1}{x}} \qquad c = C^{te}.$$

2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$: $\langle Y', \varphi \rangle = -\langle Y, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)$$

$$= \langle \delta, \varphi \rangle$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y' = \delta \text{ dans } \mathcal{D}'}$$

$$2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = 1$$

$$\Rightarrow 2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = vp\frac{1}{\nu} + C\delta$$

$$\therefore \mathcal{F}\{Y\}(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\left\{vp\frac{1}{\nu} + C\delta\right\}$$

$Y(x) - \frac{1}{2}$ est impaire; il en est de même de sa TF : $\therefore$ la distrib^n

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{vp\frac{1}{\nu} + C\delta\right\} - \frac{1}{2}\delta$$

est impaire $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi i}vp\frac{1}{\nu} + \underbrace{\frac{C\delta}{2\pi i} - \frac{\delta}{2}}_{=0}$

$\Rightarrow C = i\pi$

$$\therefore \boxed{\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = \frac{1}{2\pi i}vp\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)}$$

3) $$\mathcal{F}\{e^{-2\pi|x|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu x} \cdot e^{-2\pi|x|}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi x(1-i\nu)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi x(1+i\nu)}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{i2\pi x(1-i\nu)}}{2\pi(1-i\nu)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-2\pi x(1+i\nu)}}{-2\pi(1+i\nu)}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-i\nu)} + \frac{1}{2\pi(1+i\nu)} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{1+\nu^2}\right]$$

$$\therefore \mathcal{F}\{e^{-2\pi|x|}\} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\nu^2}\right)$$

$$\mathcal{F}^2\{e^{-i2\pi|x|}\} = \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\nu^2}\right) = e^{-2\pi|x|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

4) $f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi Y(x)$.

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi\nu x}\, dx$$

$x \to -x$:

$$\hat{f}(\nu) = -\int_{+\infty}^{-\infty} \underbrace{f(-x)}_{-f(x)\ (f \text{ impaire!})}\, e^{+i2\pi\nu x}\, dx$$

$$\therefore \hat{f}(\nu) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2\pi\nu x}\, dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\nu) = -\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(e^{i2\pi\nu x} - e^{-i2\pi\nu x}\right) dx\right.$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x\, dx$$

$$= -2i \int_{0}^{\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x\, dx$$

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$

$$f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi = \arctan x - \frac{\pi}{2}$$

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2\pi\nu x \, dx$$

$$\arctan x - \frac{\pi}{2} = u \qquad \sin 2\pi\nu x \, dx = dv$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = du \qquad -\frac{1}{2\pi\nu} \cos 2\pi\nu x = v$$

$$\hat{f}(\nu) = -2i \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \frac{\cos 2\pi\nu x}{2\pi\nu} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{1+x^2} dx \right\}$$

$$= -2i \left\{ -\frac{1}{4\nu} + \frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi\nu x}}{1+x^2} dx \right\}$$

$$= +\frac{i}{2\nu} - \frac{i}{2\pi\nu} \underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}}_{\pi e^{-2\pi|\nu|}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\nu) = \frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right)}.$$

En admettant que ce résultat est encore vrai dans $\mathcal{S}'$, on aura :

$$\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}\{\arctan x\} + \mathcal{F}\{\tfrac{\pi}{2}\} - \pi\mathcal{F}\{\gamma\}$$

$$= \mathcal{F}\{\arctan x\} + \frac{\pi}{2}\delta(\nu) - \pi\left\{\frac{1}{2\pi i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)\right\}$$

$$= \mathcal{F}\{\arctan x\} - \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}$$

On a finalement

$$\mathcal{F}\{\arctan x\} = \hat{f}(\nu) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{F}\{\arctan x\} = \frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}}$$

5) On a $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = 2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{\arctan x\}$$

Il faut donc vérifier que :

$$\pi e^{-2\pi|\nu|} = 2i\pi\nu\left[\frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}\right]$$

$$= -\pi\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \pi\overbrace{\nu\,\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}}^{1}$$

$$= -\pi + \pi e^{-2\pi|\nu|} + \pi = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

▨

TELECOM & Management SudParis – **T**ELECOM SudParis
Module MAT 3501
Coordonateur : Wojciech Pieczynski

Analyse Numérique

Examen 1, 2008/09
18 mars 2009
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite recto-verso est autorisée – Calculatrices interdites

N. B. Les exercices sont indépendants

Exercice 1

Soit $E = L^2\left(\left[0;1\right]\right)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\left[0;1\right]$ et de carré intégrable. Pour tout couple de fonctions $(u,v) \in E^2$, $\langle u,v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ définit un produit scalaire et $\left(E, \langle .\ ,\ . \rangle\right)$ est un espace de Hilbert.

Soit $f \in E$. On considère le problème ponctuel suivant :

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ telle que :} \\ \forall x \in]0;1[, -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right) = f(x), \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta. \end{cases}$$

Ce problème n'ayant pas de solution algébrique, l'exercice porte sur les deux méthodes générales d'approximation que sont la méthode des différences finies (point 1.) et la méthode des éléments finis (points 2. et 3.).

Soit N un entier positif. On considère dans la suite que $h = \dfrac{1}{N+1}$, et pour tout $i \in \{0,1,...,N+1\}, x_i = ih.$

1. La résolution du problème $(\mathcal{P})$ par la méthode des différences finies passe par une discrétisation de l'équation différentielle pour se ramener à un problème « approché » $(\mathcal{P}_h)$.
   a. Expliciter $(\mathcal{P}_h)$ et montrer qu'on se ramène à la résolution d'un système linéaire $(N+2)\times(N+2)$;
   b. Mettre $(\mathcal{P}_h)$ sous forme matricielle $A\vec{u} = 2h^2\vec{w}$, où A est une matrice $N \times N$;
   c. Ecrire le code Matlab permettant de construire $A, \vec{u}$ et $\vec{w}$ lorsque $\alpha = \beta = 0$.
   d. Ecrire le code Matlab permettant de donner la solution de $(\mathcal{P}_h)$.

On considèrera dans la suite que $\alpha = \beta = 0$

2. En introduisant une fonction auxiliaire $v \in E$ dérivable et telle que $v(0) = v(1) = 0$, donner, en utilisant l'intégration par parties, la formulation variationnelle $(\mathcal{P}')$ du problème $(\mathcal{P})$.

3. On souhaite résoudre le problème $(\mathcal{P}')$.

   a. Quelles sont les conditions suffisantes portant sur les applications *a* et *L* définies respectivement sur E^2 et E par $a(u,v) = \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx$ et $L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$, pour que la solution de $(\mathcal{P}')$ soit unique ?

   b. Le problème approché de $(\mathcal{P}')$ est noté $(\mathcal{P}_h')$. Expliciter $(\mathcal{P}_h')$ et discuter l'unicité de sa solution.

   c. Soit $S = [b; b+h]$ un segment de longueur *h* et $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à *k*. Montrer que les éléments $\left(S, \mathbb{P}_1, \Sigma_1 = \{b, b+h\}\right)$ et $\left(S, \mathbb{P}_2, \Sigma_2 = \left\{b, b+\frac{h}{2}, b+h\right\}\right)$ sont des éléments finis de Lagrange.

   Dans chaque cas, préciser la dimension de la matrice de rigidité associée à la « triangulation » du segment $[0;1]$ par les segments $\left([x_i; x_{i+1}]\right)_{0 \le i \le N}$.

   d. On considère $\left(S, \mathbb{P}_1, \Sigma_1 = \{b, b+h\}\right)$. Donner l'expression des polynômes de base p_i. Donner, en fonction des p_i, l'expression des fonctions de forme φ_k.

   e. Sachant que les coefficients de la matrice de rigidité vérifient $\left(A_{ij}'\right)_{1 \le i,j \le N} = a\left(\varphi_i, \varphi_j\right)$, montrer que $\forall i \in \{1, ..., N-1\}$, on a $A_{ii}' = 2\left(\frac{1}{h} + i\right)$ et $A_{ii+1}' = -\frac{1}{h} - i - \frac{1}{2}$;

   f. Ecrire la matrice de rigidité lorsque $N = 5$ et que l'on numérote les nœuds $s_k = x_k$.

Exercice 2

Considérons la loi de Laplace de paramètre λ de densité : $\forall x \in R$, $g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$.

1. Vérifier que g_λ est bien une densité de probabilité et donner l'expression de sa fonction de répartition G_λ.
2. En déduire une méthode de simulation de réalisations de cette loi. Ecrire le code Matlab correspondant.
3. Soit f la densité de la loi normale centrée réduite. Montrer que l'on peut utiliser g_λ pour simuler des réalisations de la loi normale centrée réduite par la méthode d'acceptation-rejet. (on pourra montrer qu'il existe M_λ tel que $\forall x \in R$, $f(x) \le M_\lambda g_\lambda(x)$).
4. Préciser le choix de λ minimisant la probabilité de rejet et écrire le code Matlab permettant la simulation de réalisations de la loi normale centrée réduite par cette méthode.

Rappels

- *Conséquences des formules de Taylor* :

Pour toute fonction T deux fois dérivable on a les approximations suivantes :

$$\frac{dT}{dx}(x_i) \approx \frac{T(x_i+\Delta x)-T(x_i)}{\Delta x} \qquad +\Delta x(\ldots) \qquad \text{Décentré droit}$$

$$\frac{dT}{dx}(x_i) \approx \frac{T(x_i)-T(x_i-\Delta x)}{\Delta x} \qquad +\Delta x(\ldots) \qquad \text{Décentré gauche}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}(x_i) \approx \frac{T(x_i-\Delta x)-2T(x_i)+T(x_i+\Delta x)}{\Delta x^2} \qquad +\Delta x^2(\ldots) \qquad \text{Centré}$$

$$\frac{dT}{dx}(x_i) \approx \frac{T(x_i+\Delta x)-T(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} \qquad +\Delta x^2(\ldots) \qquad \text{Centré}$$

- *Problème variationnel* :

Dans un espace de Hilbert, E, étant donnée une forme bilinéaire continue a, et une forme linéaire continue L, un problème variationnel (Q) consiste à :

$$(Q): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in E \end{cases}$$

- *Fonctions de base* :

Etant donné un élément fini de Lagrange $(K, P, \Sigma = \{a_1, ..., a_M\})$, on appelle fonctions de base les M fonctions p_M p_1, …, p_M vérifiant $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$).

- *Méthode d'acceptation-rejet* :

Considérons une densité à simuler f, une densité simulable g, et une constante connue M pour laquelle

$$f(x) \leq Mg(x)$$

Alors f peut être simulée de la manière suivante :

(i) Simuler $Z = z$ selon g, et $U = u$ selon la loi uniforme sur $[0,1]$;

(ii) Prendre $x = z$ si $u \leq \frac{f(z)}{Mg(z)}$; retourner en (i) sinon.

TELECOM & Management SudParis – **T**ELECOM SudParis
Module MAT 3501
Coordonateur : Wojciech Pieczynski

Analyse Numérique

Examen 1, 2008/09
18 mars 2009
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite recto-verso est autorisée – Calculatrices interdites

N. B. Les exercices sont indépendants

Exercice 1

Soit $E = L^2\left([0;1]\right)$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0;1]$ et de carré intégrable. Pour tout couple de fonctions $(u,v) \in E^2$, $\langle u,v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ définit un produit scalaire et $\left(E, \langle .\ ,\ . \rangle\right)$ est un espace de Hilbert.

Soit $f \in E$. On considère le problème ponctuel suivant :

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ telle que :} \\ \forall x \in]0;1[, -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right) = f(x), \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta. \end{cases}$$

Ce problème n'ayant pas de solution algébrique, l'exercice porte sur les deux méthodes générales d'approximation que sont la méthode des différences finies (point 1.) et la méthode des éléments finis (points 2. et 3.).

Soit N un entier positif. On considère dans la suite que $h = \dfrac{1}{N+1}$, et pour tout $i \in \{0,1,...,N+1\}, x_i = ih.$

1. La résolution du problème $(\mathcal{P})$ par la méthode des différences finies passe par une discrétisation de l'équation différentielle pour se ramener à un problème « approché » $(\mathcal{P}_h)$.

   a. Expliciter $(\mathcal{P}_h)$ et montrer qu'on se ramène à la résolution d'un système linéaire $(N+2)\times(N+2)$;

On a $\forall x \in]0;1[, -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right) = -\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - (1+x)\dfrac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}$ donc pour tout $x_i, i \in \{1,...,N\}$ on a $-\dfrac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h} - (1+x_i)\dfrac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i)$. $\forall i \in \{0,...,N+1\}$, on pose $u_i = u(x_i)$, alors

$$-\frac{h(u_{i+1}-u_{i-1})}{2h^2} - 2(1+ih)\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{2h^2} = -\frac{(2+h+2ih)u_{i+1} - 4(1+ih)u_i + (2-h+2ih)u_{i-1}}{2h^2} = f(x_i)$$

et le problème $(\mathcal{P}_h)$ correspond à la recherche de $(u_0,...,u_{N+1})$ solution réelle du système :

$$(S):\begin{cases} u_0=\alpha,\ u_{N+1}=\beta, \\ -(2+(2i-1)h)u_{i-1}+4(1+ih)u_i-(2+(2i+1)h)u_{i+1}=2h^2 f(x_i), \forall i\in\{1,...,N\} \end{cases}.$$

b. Mettre $(\mathcal{P}_h)$ sous forme matricielle $A\vec{u}=2h^2\vec{w}$, où A est une matrice $N\times N$;

u_0 et u_{N+1} sont définis par les deux premières équations de (S). On pose donc

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, \vec{w}=\begin{pmatrix} f(x_1)+\dfrac{(2+h)\alpha}{2h^2} \\ f(x_2) \\ ... \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N)+\dfrac{(2+(2N+1)h)\beta}{2h^2} \end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{bmatrix} 4(1+h) & -(2+3h) & 0 & 0 & ... & 0 \\ -(2+3h) & 4(1+2h) & -(2+5h) & 0 & ... & 0 \\ 0 & -(2+5h) & 4(1+3h) & -(2+7h) & & \\ & & & & & \\ 0 & ... & 0 & -(2+(2N-3)h) & 4(1+(N-1)h) & -(2+(2N-1)h) \\ 0 & ... & 0 & 0 & -(2+(2N-1)h) & 4(1+Nh) \end{bmatrix}$$

c. Ecrire le code Matlab permettant de construire $A,\vec{u}$ et $\vec{w}$ lorsque $\alpha=\beta=0$.

$\vec{u}$ est le vecteur inconnu et ne sera trouvé qu'après inversion de A.

$\vec{w}$: On suppose connue la fonction f :

```
xi=linspace(0,1,N+2);
x=xi.';
g=f(x);
w=g(2:N+1);
```

Pour la matrice A :

```
A=zeros(N);
h=1/(N+1);
A(1,1)=4*(1+h);
for i=2:N
  A(i,i)=4*(1+i*h);
  A(i-1,i)=-2-(2*i-1)*h;
  A(i,i-1)= A(i-1,i);
end
```

d. Ecrire le code Matlab permettant de donner la solution de $(\mathcal{P}_h)$.

Le code est :

```
w=2*h^2*w ;
u=A\w ;
```

On considèrera dans la suite que $\alpha = \beta = 0$

2. En introduisant une fonction auxiliaire $v \in E$ dérivable et telle que $v(0) = v(1) = 0$, donner, en utilisant l'intégration par parties, la formulation variationnelle $(\mathcal{P}')$ du problème $(\mathcal{P})$.

On a $\forall x \in]0;1[, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)v(x) = f(x)v(x)$ que l'on intégre par parties pour obtenir $\int_0^1 \left((1+x)u'(x)\right)v'(x)dx - \left[\left((1+x)u'(x)\right)v(x)\right]_0^1 = \int_0^1 f(x)v(x)dx$ ce qui, compte tenu des conditions de Dirichlet s'écrit également : $\int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$. La formulation variationnelle de $(\mathcal{P})$ est donc :

$$(\mathcal{P}'): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ tel que} \\ \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in E \end{cases}$$

3. On souhaite résoudre le problème $(\mathcal{P}')$.

   a. Quelles sont les conditions suffisantes portant sur les applications a et L définies respectivement sur E^2 et E par $a(u,v) = \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx$ et $L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$, pour que la solution de $(\mathcal{P}')$ soit unique ?

Voir les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram.

   b. Le problème approché de $(\mathcal{P}')$ est noté $(\mathcal{P}_h')$. Expliciter $(\mathcal{P}_h')$ et discuter l'unicité de sa solution.

Soit E_h un sous espace de E de dimension finie. Le problème approché de $(\mathcal{P}')$ est alors :

$$(\mathcal{P}_h'): \begin{cases} \text{trouver } u_h \in E_h \text{ tel que} \\ \int_0^1 (1+x)u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in E_h \end{cases}$$

Les conditions suffisantes précédentes assurent l'unicité de la solution de $(\mathcal{P}_h')$.

   c. Soit $S = [b;b+h]$ un segment de longueur h et $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k. Montrer que les éléments $\left(S, \mathbb{P}_1, \Sigma_1 = \{b, b+h\}\right)$ et $\left(S, \mathbb{P}_2, \Sigma_2 = \left\{b, b+\frac{h}{2}, b+h\right\}\right)$ sont des éléments finis de Lagrange.

   Dans chaque cas, préciser la dimension de la matrice de rigidité associée à la « triangulation » du segment $[0;1]$ par les segments $\left([x_i; x_{i+1}]\right)_{0 \le i \le N}$.

$\left(S,\mathbb{P}_1,\Sigma_1=\{b,b+h\}\right)$: $\dim(\mathbb{P}_1)=Card(\Sigma_1)$ et la seule fonction affine s'annulant en 2 points est identiquement nulle. C'est donc bien un élément fini de Lagrange. Il y a alors N points « intérieurs » dans la triangulation associée et la matrice de rigidité est de taille $N\times N$.

$\left(S,\mathbb{P}_2,\Sigma_2=\{b,b+h/2,b+h\}\right)$: $\dim(\mathbb{P}_2)=Card(\Sigma_2)$ et le seul polynôme de degré 2 s'annulant en 3 points est identiquement nul. C'est donc bien un élément fini de Lagrange. Il y a alors $2N+1$ points « intérieurs » dans la triangulation associée et la matrice de rigidité est de taille $(2N+1)\times(2N+1)$.

d. On considère $\left(S,\mathbb{P}_1,\Sigma_1=\{b,b+h\}\right)$. Donner l'expression des polynômes de base p_i. Donner, en fonction des p_i, l'expression des fonctions de forme φ_k.

Il y a deux polynôme de base, $p_1(x)=a_1x+b_1$ et $p_2(x)=a_2x+b_2$ tels que $\begin{cases}p_1(b)=1\\p_1(b+h)=0\end{cases}$ et $\begin{cases}p_2(b)=0\\p_2(b+h)=1\end{cases}$. On a donc $p_1(x)=\frac{1}{h}(h+b-x)$ et $p_2(x)=\frac{1}{h}(x-b)$.

La fonction de forme φ_k est définie sur les segments consécutifs $[(k-1)h;kh]$ et $[kh;(k+1)h]$ par :

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{h}(x-(k-1)h)\mathbb{I}_{[(k-1)h;kh]}(x)+\frac{1}{h}((k+1)h-x)\mathbb{I}_{[kh;(k+1)h]}(x)$$

e. Sachant que les coefficients de la matrice de rigidité vérifient $\left(A_{ij}'\right)_{1\le i,j\le N}=a(\varphi_i,\varphi_j)$, montrer que $\forall i\in\{1,...,N-1\}$, on a $A_{ii}'=2\left(\frac{1}{h}+i\right)$ et $A_{ii+1}'=-\frac{1}{h}-i-\frac{1}{2}$;

$$A_{ii}'=\int_0^1(1+x)\varphi_i'(x)\varphi_i'(x)dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}(1+x)\varphi_i'(x)^2dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+x)\varphi_i'(x)^2dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{(1+x)}{h^2}dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(1+x)}{(-h)^2}dx=2\left(\frac{1}{h}+i\right)$$

et $A_{ii+1}'=\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+x)\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x)dx=-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(1+x)}{h^2}dx=-\frac{1}{h}-i-\frac{1}{2}$

f. Ecrire la matrice de rigidité lorsque $N=5$ et que l'on numérote les nœuds $s_k=x_k$.

Le calcul de A_{NN}' est identique aux autres A_{ii}'et pour $j\notin\{i,i+1\}$, $A_{ij}'=0$. De plus, la matrice A' est symétrique. On a donc :

$$A=\begin{bmatrix}14&-7,5&0&0&0\\-7,5&16&-8,5&0&0\\0&-8,5&18&-9,5&0\\0&0&-9,5&20&-10,5\\0&0&0&-10,5&22\end{bmatrix}$$

Exercice 2

Considérons la loi de Laplace de paramètre λ de densité : $\forall x \in R$, $g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$.

1. Vérifier que g_λ est bien une densité de probabilité et donner l'expression de sa fonction de répartition G_λ .

g_λ est une fonction positive et $\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1$. g_λ est bien une densité.

si $x \le 0$, $G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$ et si $x > 0$, $G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt + \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$.

On a donc $G_\lambda(x) = \frac{1}{2} e^{\lambda x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^-} + \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^{+*}}$

2. En déduire une méthode de simulation de réalisations de cette loi. Ecrire le code Matlab correspondant.

Il faut utiliser la méthode de la fonction de répartition inverse :

Pour $y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $G_\lambda^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \log(2y)$ et pour $y \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$, $G_\lambda^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \log\left(2(1-y)\right)$. Le code Matlab permettant de générer la réalisation z suivant g_λ est alors :

```
u=rand();
z=1/lambda*log(2*u)*(u<=0.5)-1/lambda*log(2*(1-u))*(u>0.5);
```

3. Soit f la densité de la loi normale centrée réduite. Montrer que l'on peut utiliser g_λ pour simuler des réalisations de la loi normale centrée réduite par la méthode d'acceptation-rejet. (on pourra montrer qu'il existe M_λ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \le M_\lambda g_\lambda(x)$).

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{g_\lambda(x)} = \frac{2}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda|x|\right) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(|x|-\lambda)^2 - \lambda^2}{2}\right)$ qui atteint son maximum sur $\mathbb{R}$ lorsque $(|x|-\lambda)^2$ est minimum c'est-à-dire lorsque $x = \pm\lambda$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{g_\lambda(x)} \le \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$ et on choisit $M_\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$.

4. Préciser le choix de λ minimisant la probabilité de rejet et écrire le code Matlab permettant la simulation de réalisations de la loi normale centrée réduite par cette méthode.

La probabilité de rejet est minimale lorsque M_λ (ou $m(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$) est minimum. Comme $m'(\lambda)=\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$, c'est le choix de $\lambda=1$ qui minimise la probabilité de rejet. On a alors $M_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\forall x\in\mathbb{R}, \frac{f(x)}{M_1 g_1(x)}=\exp\left(-\frac{(|x|-1)^2}{2}\right)$.

Pour générer une réalisation *n* d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite le code Matlab est :

```
ok=0;
while ~ok
    u=rand();
    z=log(2*u)*(u<=0.5)-log(2*(1-u))*(u>0.5);
    w=rand();
    if w <= exp(-0.5*(abs(z)-1)^2)
       n=z; ok=1;
   end
end
```

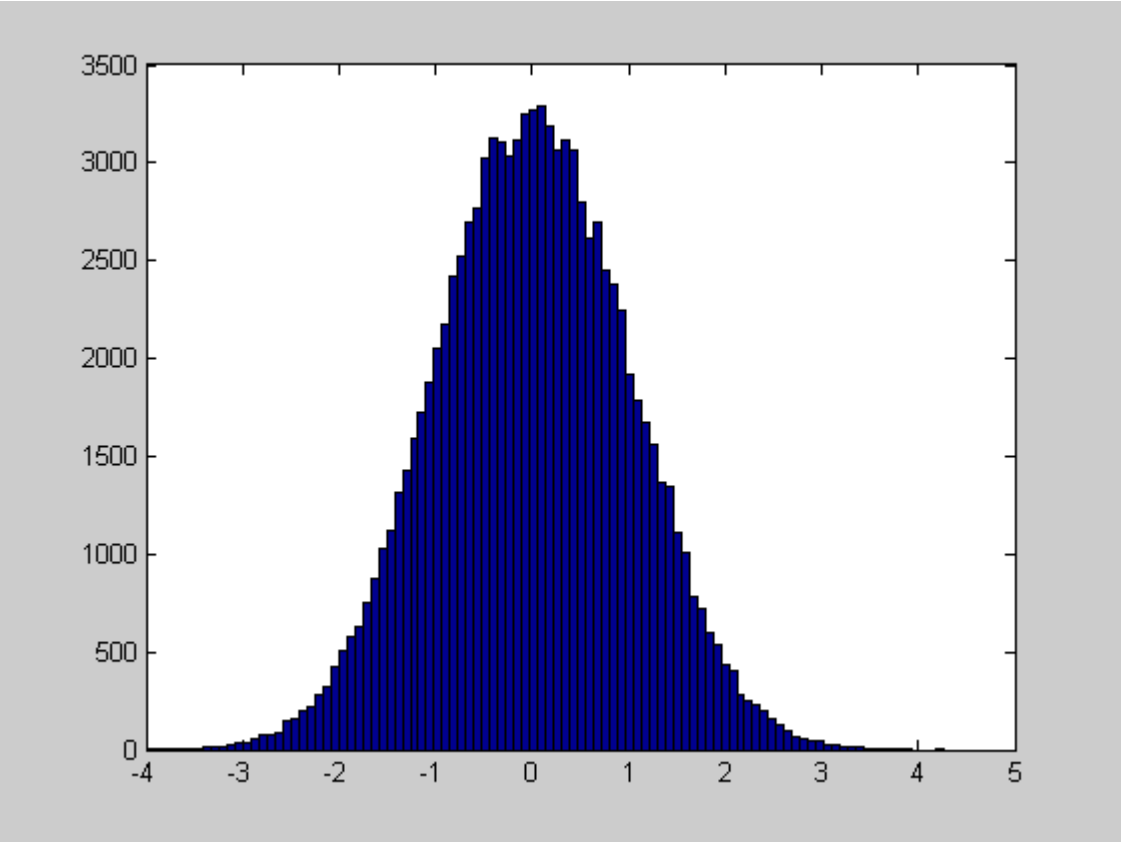


fig.1 Exemple d'histogramme des effectifs simulés grâce à cette méthode.

Année 2008-2009
Solution du Contrôle Final – 1ère Session
Module MAT3502

Mounim A. El Yacoubi

Exercice 1 **(6 points)**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Valeurs propres de **A**

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Les valeurs propres de **A** sont donc 1, 2 et 3.

.

ii) Vecteurs propres de **A**.

On résout le système d'équations induit par $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\, \mathbf{u}_i = 0$, $\mathbf{u}_i$ étant le vecteur propre associé à la valeur propre de λ_i.

- Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0, 2x = -z$$

➔ L'espace propre associé à $\lambda = 1$ est $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

- Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0, x = 0, z = cst$$

➔ L'espace propre associé à $\lambda = 2$ est $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = x, z = -2x$$

➔ L'espace propre associé à $\lambda = 3$ est $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

iii) Diagonalisation de la matrice **A**.

Dans la base $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, la matrice A s'écrit : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 **(14 points)**

i) a) La transformation permettant de passer des données brutes r_{ij} aux éléments x_{ij} de **X** s'écrit :

$$x_{ij} = \frac{r_{ij} - \bar{r}_j}{\sqrt{n}\sigma_j}, \quad i = 1,2,\ldots, p, n = 25, p = 8$$

b) Coordonnées de la ligne de **fr** (France) dans la matrice X.

fr 0.0347 0.0731 0.2684 0.1566 0.0438 0.1049 0.2961 0.1276

ii) a) L'analyse en composantes principales relative à la matrice de corrélation $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ s'effectue dans l'espace **des individus** (chaque individu étant représenté par 8 variables).

b) Il s'agit d'une *ACP* **Normée**.

iii) Les cinq premières valeurs propres de la matrice de corrélation sont données dans le tableau suivant :

Valeurs propres:

i	λ_i
1	5.311
2	1.016
3	0.745
4	0.448
5	0.266

a) Le taux d'inertie « expliqué » par les cinq premiers axes factoriels (composantes principales) est :

$$\tau_{1-5} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{5} \lambda_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{8} \lambda_\alpha} = 97.33\% \qquad \text{(en utilisant } \sum_{\alpha=1}^{8} \lambda_\alpha = trace(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = 8\text{)}$$

b) La représentation est de très bonne qualité puisque les 5 premiers axes factoriels représentent 97.33% de l'inertie totale.

iv) Les 2 premiers axes factoriels (Vecteurs Propres) sont les suivants :

$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$
-0.307	0.166
0.270	-0.584
-0.315	-0.449
-0.415	-0.090
-0.340	0.411
-0.411	0.183
-0.364	-0.357
-0.379	-0.303

a) Contribution de chacun de ces 2 premiers axes factoriels à l'inertie de l'élément **fr** (France).

$$Cr_\alpha(i) = \frac{\psi_{\alpha_i}^2}{\|\mathbf{e}_i\|^2} = \left(\frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{u}_\alpha}{\|\mathbf{e}_i\|}\right)^2 \qquad \|\mathbf{e}_i\|^2 = \sum_{j=1}^{8} e_{ij}^2 = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i$$

fr correspond à $i = 10$

$\|\mathbf{e}_{10}\|^2 = 0.22$

$\mathbf{e}_{10}.\mathbf{u}_1 = -0.3546$ $\mathbf{e}_{10}.\mathbf{u}_2 = -0.2787$

$Cr_1(10)$	$Cr_2(10)$
0.5716	0.3531

b) Qualité de représentation Q de **fr** par l'espace des 2 premiers axes factoriels et interpréter.

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{2} Cr_\alpha(10) = 0.9247 = 92.47\%$$

Donc, les 2 premiers axes factoriels rendent compte de prés de 92.5% de l'inertie de **fr**, ce qui constitue une très bonne qualité de représentation.

v) a) L'importance de l'élément **fr** (France) pour chacun des 2 premiers axes factoriels est déterminée par la contribution absolue $Ca_\alpha(i)$

$$Ca_\alpha(i) = \frac{\psi_{\alpha i}^2}{\lambda_\alpha} = \frac{\left(\mathbf{e}_i^T \mathbf{u}_\alpha\right)^2}{\lambda_\alpha}$$

fr correspond à $i = 10$

$Ca_1(10)$	$Ca_2(10)$
0.0237	0.0765

b) L'élément **fr** (France) a une incidence faible sur les 2 premiers axes factoriels. Cela résulte du fait que ses coordonnées ne s'écartent pas significativement de leurs moyennes respectives : **fr** n'est pas un élément atypique.

vi) a) Coefficients de corrélation linéaire $\rho_{j\alpha}$ entre l'axe factoriel $\mathbf{u}_\alpha$ et les 8 variables.

$$\rho_{j\alpha} = \frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{v}_\alpha}{\|\mathbf{x_j}\|} = \mathbf{x}_j^T \mathbf{v}_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} u_{\alpha j} \qquad (\|\mathbf{x_j}\| = 1)$$

Donc, pour le 1er axe factoriel $\mathbf{u}_1$,

D'où : $$\rho_{j1} = \sqrt{\lambda_1} u_{1j}$$

ρ_{11}	ρ_{21}	ρ_{31}	ρ_{41}	ρ_{51}	ρ_{61}	ρ_{71}	ρ_{81}
-0.7075	0.6222	-0.7259	-0.9564	-0.7836	-0.9472	-0.8389	-0.8734

b) Le 1er axe factoriel correspond, grossièrement au vecteur moyen des variables, et oppose le taux de chômage aux autres variables.

CONTROLE FINAL GF11 INT 2007/2008
(1 h30, sans document ni calculette)

PREMIERE PARTIE (2 points par question)

1. Citez quatre différences essentielles existant entre une SA et une SARL.

2. Comment est en train d'évoluer la notion de produit d'un point de vue marketing ?

3. Quels sont les temps et domaines d'études à prendre en compte dans une réflexion stratégique au niveau de l'entreprise ?

4. Evoquez, au travers de deux exemples, les conflits de logique pouvant survenir entre un service de production et un service marketing.

5. Rentabilité sociale et rentabilité économique sont-elles contradictoires ?

SECONDE PARTIE (10 points)

1. A partir des données comptables fournies ci-après, établir le compte de résultats ainsi que le bilan, avant et après répartition du résultat, au 31.12.07 de la société NOA qui fabrique des téléphones cellulaires. (8 points)

2. Calculez la valeur ajoutée de la société ainsi que sa marge brute d'autofinancement. (2 points)

Toutes les valeurs sont exprimées en KEuros

Produits sur gains de change = 3
Stock final matières premières = 60 et Stock initial de matières premières = 20
Dettes financières à long terme = 25 et Dettes financières à court terme = 10
Créances clients = 200
Provision 2007 pour clients douteux = 5% des créances clients
Frais EDF-GDF = 85
Capital social = 400
Impôts et taxes = 140
Frais divers de gestion = 40
Achat d'équipements de fabrication (valeurs d'achat au 1.01.05) = 500
Ces matériels de fabrication s'amortissent linéairement sur 10 ans.
Frais de transport = 42
Salaires versés = 260 et Charges salariales = 50% des salaires
Dettes fournisseurs = 50
Production vendue = 1847
Frais de publicité = 83
Immobilisations incorporelles = 45
Loyers payés = 100
Réserves légales = 40 et Réserves facultatives = 60
Frais financier sur emprunt = 2
Disponibilités = 40
Achats de matières premières = 900
Produits exceptionnels sur la vente terrain agricole = 52
Impôt sur les sociétés = 30% du solde total (produits - charges)
Répartition du bénéfice après IS : 10% en réserves légales, 20% en réserves facultatives et 70% en dividendes

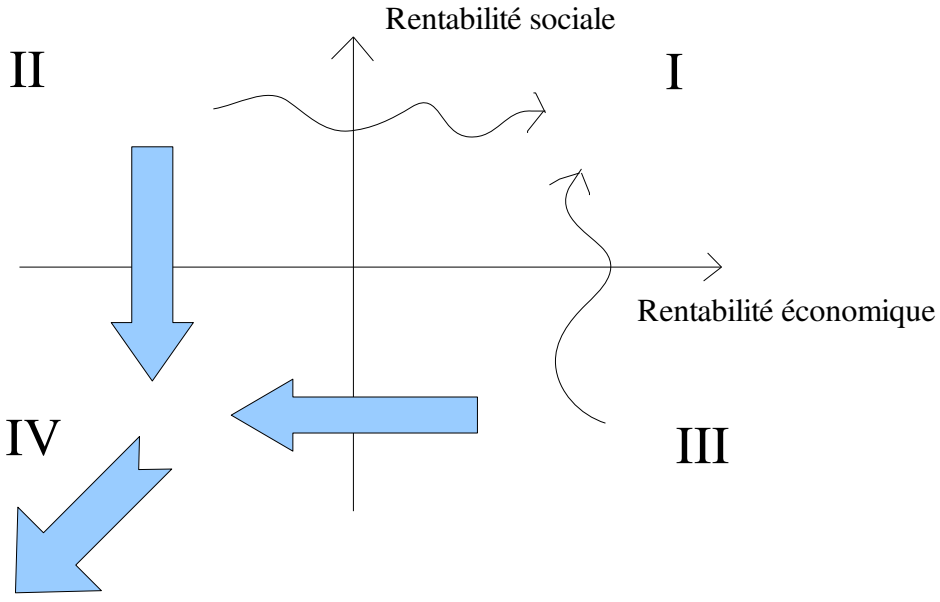
1- Une SA (Société Anonyme) doit posséder un capital de départ de 38000€, ainsi qu' un minimum de 7 personnes, La société est divisé en actions et peut donc être cotée à la bourse de Paris.
En revanche une SARL (Société A Risque Limité) ne doit pas posséder de capital de départ et le nombre de personne minimum est de 2. Elle est divisé en parts et ne peut donc pas être cotée en bourse.

2- D'un point de vue marketing, un produit comporte trois niveaux : le cœur du produit (sa forme, son utilité), la partie périphérique (le prix, le packaging, le point de vente) et la troisième partie qui correspond à ce qui est autour du produit (garantie, SAV...). Toujours d'un point de vue marketing, un produit se positionne dans une gamme, par rapport à d'autres produits de même type, selon la partie périphérique.

3- Dans une réflexion stratégique, trois domaines doivent être pris en compte : l'environnement (tous ce qui est extérieur à l'entreprise, la concurrence ou l'évolution de marché par exemple.), l'entreprise (ses ressources, ses métiers...) et la direction générale. Il y a 3 temps, tout d'abord l'étude de marché, qui doit prendre en compte les besoins des dirigeants, les capacités de l'entreprise et l'état du marché (c'est ce équivaut au diagnostic chez le médecin). Ensuite il y a la mise en place du plan stratégique (ce qui équivaut au traitement pour le médecin) et enfin il y a le suivi de l'action stratégique (ce qui équivaut au suivi médical pour le médecin).

4- Le but du service marketing est de réussir à vendre le produit, alors que celui du service de production est de fabriquer un produit le plus fiable possible, et aussi le moins difficile à réaliser. Une des sources du conflit peut se situer sur le produit lui-même, où le service marketing peut trouver le produit trop complexe à utiliser (manuel trop long, trop de boutons...) et donc trop dur à vendre, alors que pour le service de production, le simplifier deviendrait trop complexe (changement des chaînes, apport d'aide électronique...)
Une autre source de conflit peut être le prix, le service marketing voudra (généralement, si ce n'est pas un produit de luxe) une baisse du prix pour faciliter les ventes. En revanche le service de production demandera une augmentation pour obtenir plus de moyens pour sa production.

5- Si auparavant les dirigeants pensaient qu'augmenter la rentabilité sociale, faisait baisser la rentabilité économique (et inversement), cela n'est plus vrai.
Il faut en fait considérer le schéma suivant :



L'idéal est donc de se situer dans le quadrant I. Même si il est difficile de passer du quadrant II au I, il ne faut pas diminuer la rentabilité sociale quand on se situe dans le quadrant II, car même si à court terme on risque de « tomber dans le III puis dans le IV.

Compte de résultat

Compte de résultat			
Charges		Produits	
Exploitation :		Exploitation :	
Achat matières premières	900	Production vendue	1847
Variation du stock	-40		
		Finance :	
Impôts, taxes	140		
frais EDF/GDF	85	Produits sur gain de change	3
frais de publicité	83		
frais de transport	42	Exceptionnel :	
loyers payés	100		
frais divers de gestion	40	Vente terrain agricole	52
amortissement matériel (10%)	50		
salaires versés	260		
charges salariales	130		
provisions client douteux (5%)	10		
Finance :			
frais financier sur emprunt	2		
Exceptionnel :			
	1802		1902

T Produits – Tcharges = 100
donc IS = 30
Bénéfice après IS = 70

Bi		
Actif		
	avant répartition	après répartition
<u>Actifs immobilisés ;</u>		
Immobilisations incorporelles	45	45
Achats équipement	350	350
Stock final matière première	60	60
<u>Actifs circulants :</u>		
Créances clients	190	190
Disponibilités	40	40
	685	685

lan		
Passif		
	avant répartition	après répartition
Capitaux propres :		
Capital social	400	400
Réserves légales	40	47
Réserves facultatives	60	74
Résultat :	70	0
Dettes :		
Dettes financières court terme	25	25
Dettes financières long terme	10	10
Dettes fournisseurs	50	50
Dividendes	0	49
Impôts sociétés	30	30
	685	685

lundi 9 mars 2009 de 17h à 18h30

CONTROLE FINAL GF11 - INT 2008/2009
(1h30, sans document ni calculette)

PREMIERE PARTIE (2 points par question)

1. Expliquez la différence existant entre une stratégie induite et une stratégie construite

Une stratégie induite se construit à partir des opportunités économiques se situant au niveau de l'environnement. Elle se fonde principalement sur les résultats des études de marché et des études de la concurrence.

Une stratégie construite se fonde sur les forces et les compétences distinctives de l'entreprise. C'est une stratégie plus interne qu'externe.

Dans la pratique, en fonction de la conjoncture, l'entreprise passe fréquemment d'un cycle de stratégies induites (croissance du secteur d'activité) à un cycle de stratégies construites (crise dans le secteur d'activité).

2. A quoi sert le bilan social ?

Le bilan social a deux objectifs majeurs :

1) Fournir des informations à caractère social sur l'entreprise qui viendront renforcer les informations financières et économiques disponibles dans la liasse fiscale (bilan et compte de résultats). Ces informations visent à mieux appréhender la globalité de l'entreprise.
2) Permettre d'organiser ces informations sociales dans un système de gestion de manière à pouvoir calculer des ratios ou soldes intermédiaires de gestion similaires à ceux que l'on rencontre dans la finance et la comptabilité. D'où la nécessité d'avoir des informations quantifiées dans le bilan social.

3. Quelles sont les quatre variables du marketing mix ?

- Le produit
- Le prix
- La publicité –communication
- La distribution

4. Pourquoi la comptabilité française est-elle divisée en deux documents principaux : le bilan et le compte de résultats ?

La comptabilité française, comme la plupart des comptabilités dites modernes, est une comptabilité en partie double, c'est-à-dire qu'elle mesure à la fois l'enrichissement de la firme (son patrimoine) et qu'elle sert à évaluer les résultats des flux économiques et financiers survenus dans l'année, afin d'aider à une meilleure gestion de la firme.

Le bilan, photographie de la situation économique et financière de l'entreprise, est un compte qui permet d'apprécier l'enrichissement de la firme depuis sa création.

Le compte de résultats, qui mesure les flux survenus durant l'année, sert à déterminer le résultat d'activité de l'entreprise.

Bien que distincts les deux comptes sont étroitement liés. Le résultat d'activité du compte de résultat apparaît dans le bilan.

5. Pourquoi la structure d'entreprise purement hiérarchique est-elle contestable et contestée ?

Elle est contestable car elle s'appuie sur une structuration hiérarchique du pouvoir dans l'entreprise qui, si elle pouvait se concevoir dans un monde certain et relativement stable (monde aujourd'hui de plus en plus caduc), est inadaptée dans un environnement où l'incertitude règne et où le changement devient la règle.

Elle est contestée car elle part du présupposé que tout supérieur hiérarchique en connaît plus que ses subordonnées. Or, dans un monde plus complexe, où les études et les expériences sont de plus en plus spécialisées, ce présupposé est mis à mal. L'être omnipotent et omniscient à la tête de l'entreprise est considérée par tout un chacun comme un mythe, voire une vue de l'esprit.

SECONDE PARTIE (10 points)

Voir corrigé ci-joint

Compte de résultat

I Exploitation		I Exploitation	
Achats march.	40	Ventes marq.	1020
Δ Stock " (SI-SF) 6-8	-2		
Autres charges ext.	273		
Impôts et taxes	28		
Frais personnel	410		
Dot. amort 4+5 =	9	II Financiers	
" provisions	6	Produits financiers	12
II Financiers		III Exceptionnels	
III Exceptionnels		Produits exceptionnels	2
	764		1034

Δ Résultat : +270
IS : 90
Bénéfice IS 180

Bilan

	Brut	Amort Prov	Net	Net		Avant	Après
I V.I					I Capitaux Propres		75
Brevet	180	—	180		Capital social	75	~~75+18=93~~
Logiciel Bureau	~~25~~	5	20		Réserve légale	15	15+18=33
" informat.	24	~~4~~	20		Autres réserves	122	122+72=194
Fonds de commerce	15	—	15		Résultat après IS	180	0
					II Dettes		
II V.C.I					Dettes financières	14	14
Stocks	8	—	8	6	Autres dettes sociales	12	12
Créances clients	180	6	174		IS	90	90
Disponibilités	91	—	91		Dividendes	—	—
			508			508	508

Valeur Ajoutée = $1020 - (40 - 2 + 273) = 1020 - 311 = \underline{709}$

E.B.E = $709 - (28 + 410) = 709 - 438 = 271$

Rentabilité économique = $\frac{EBE}{Actif} = \frac{271}{508} = \underline{53{,}346\ \%}$

CONTRÔLE IG1 2009 SANS DOCUMENTS

1) Vous avez passé votre permis de conduire il y a deux ans, et grâce aux jobs d'été, vous avez pu faire l'acquisition d'une voiture d'occasion. La campagne du BDE vient de se terminer. Vous avez largement arrosé votre dernière nuit de campagne électorale et vous n'avez quasiment pas dormi. Vous utilisez votre voiture pour ramener des meubles dont vous avez eu besoin à des amis. Vous êtes pressé (e) et vous conduisez vite, plus qu'il n'est permis par le Code de la route. Vous grillez un feu rouge et vous êtes arrêté (e). Vous subissez un éthylotest : vous avez 0, 8 gramme d'alcool dans le sang. …Une plainte est déposée parce que, juste avant le feu rouge, vous avez écrasé un chien. Que risquez-vous ? Devant quelle juridiction serez-vous poursuivi (e) ? La réponse serait-elle différente si les faits s'étaient déroulés, non pas à Evry, mais à Brno ?
2) Qui est le chef de l'administration française : le Président de la République ou le Premier ministre ? A une époque où le Président de la République cumule les pouvoirs de l'Exécutif, pouvez-vous indiquer quelles sont les principales fonctions dévolues au Premier ministre dans la Constitution de 1958 révisée en 2008 ?
3) Vous avez fait grande impression lors de votre convention de stage de troisième année. Malgré les difficultés économiques, l'entreprise où vous avez sévi si brillamment vous propose un travail attractif, avec une période d'essai de cinq mois, renouvelable une fois. Que devez-vous faire remarquer au service Ressources humaines avant de signer votre contrat de travail ?
   Cette expérience ne s'avère pas aussi bénéfique que vous l'escomptiez. Votre employeur et vous décidez de rompre le contrat d'un commun accord. Touchez-vous des indemnités ? Justifiez votre réponse, positive ou négative.
   Vous avez tout de même réalisé du bon travail. Un employeur vous approche et vous propose un contrat de projet (il s'agit de développer un logiciel très spécifique) de 18 mois : serez-vous tenté (e) d'accepter ou de refuser ? Donnez vos arguments.
4) Votre petit frère a treize ans. Il adore les animaux mais, jusque là vos parents ont émis un veto à l'arrivée d'un animal domestique, car ils craignaient de supporter toutes les charges. A présent, vos parents présument que votre frère a acquis un certain sens des responsabilités. En conséquence, votre frère choisit avec vous un chien. Les premiers mois se passent bien, jusqu'au jour où ce chien attaque une préposée qui est mordue et a un arrêt de travail de trois jours. Quelles sont les responsabilités de vos parents et de votre frère ? Pouvez-vous vous retourner contre l'éleveur qui a négligé de vous renseigner sur les « tares » éventuelles de cet animal, accrues par la consanguinité ? Si oui, sur quelles bases ?
5) Vous regardez une émission de téléachat. Vous êtes intéressé (e) par l'article qui vous est proposé : un rameur d'appartement. Vous commandez l'article qui vous est livré dans les conditions habituelles de clauses générales de vente. A la livraison, vous vous apercevez que l'article ne vous convient pas et vous vous rétractez au bout de trois jours. Etes-vous dans votre droit ? Le téléachat relève-t-il selon vous du démarchage ? Justifiez vos réponses.

CF1 de Droit 2008-2009

1) Dans l'énoncé, apparaissent plusieurs infractions au code de la route et l'atteinte à un élément patrimonial mobilier (le chien) ; cela correspond à un retrait de permis (plusieurs contraventions) et à un délit (0, 8g). Quand il y a plusieurs contraventions et un délit, c'est l'infraction la plus grave qui est retenue pour décider du tribunal compétent. L'infraction la plus grave est le délit et relève du tribunal correctionnel. Le conducteur est responsable pénalement et passible d'une peine d'emprisonnement sans doute avec sursis et d'une amende. Le maître du chien va se porter partie civile et demander réparation du préjudice subi. Il obtiendra satisfaction. Le conducteur est assisté de son avocat.
En matière d'alcoolémie, l'UE a recommandé de ne pas dépasser 0,5 g mais dans ce domaine il y a principe de subsidiarité. A Brno, en république tchèque, le taux d'alcoolémie toléré est égal à 0. Si le conducteur avait conduit avec 0, 8 g dans le sang dans cette ville, il aurait encouru une sanction particulièrement sévère.

2) Le premier ministre est le chef de l'administration. Il dirige, comme chef du gouvernement, la politique de la nation. Il est responsable devant le Parlement. Il dispose du pouvoir réglementaire (article 37 de la constitution). Il représente la France au Conseil européen en cas de cohabitation.

3) L'actualité en matière du droit du travail

a) La durée maximale d'une période d'essai, depuis la loi de 2008, est de quatre mois renouvelable une fois. Il faut donc signaler au service Ressources humaines l'erreur commise.
b) La rupture d'un commun accord, depuis la loi du 25 juin 2008, donne lieu à des indemnités d'un montant équivalent à des indemnités de licenciement.
c) Enfin le CDD de projet est réservé aux cadres et ingénieurs pour un projet spécifique, qui varie de 18 à 36 mois. Cela correspond à notre cas. Cette réforme a été initiée à l'initiative du Syntec. Un accord collectif de branche doit avoir été prévu. Les opinions des partenaires sociaux sont divergents sur cette réforme.

4) La préposée a été l'objet d'une blessure involontaire. Il s'agit d'un délit. La préposée a donc intérêt à saisir le tribunal correctionnel et à se porter partie civile. Elle obtiendra réparation pour le dommage corporel, le pretium doloris, le préjudice moral. Ce sont les parents, qui, en tant que commettants, répondent des dommages causés par leur bien (le chien). Il sera difficile de se retourner contre l'éleveur. Il faudrait prouver qu'il était au courant de la consanguinité. Néanmoins, actuellemment, la parenté des chiens est assez bien déterminée quand il s'agit de races connues. Si le chien appartenait à une race agressive, c'est aux parents que revenait la responsabilité de dresser le chien afin qu'il n'attaque personne. Il sera délicat de prouver que l'éleveur est à l'origine d'un dol négatif et d'obtenir l'annulation du contrat de vente.

5) Ici, nous sommes dans un contrat de vante à distance. L'acheteur dispose d'un délai de sept jours, à partir de la livraison, pour retourner le rameur et obtenir un dédommagement (remboursement du montant du rameur et des frais de livraison). Il

supportera seulement les frais de retour. Le téléachat n'est pas un démarchage (vente au domicile, personne ou professionnel) ; c'est un contrat entre absents.

CSC 3001: examen 1ère session 2008-2009

Consignes :

- Toute entorse à ces consignes donnera lieu à des pénalités.
- Documents autorisés : uniquement ceux fournis dans le cadre du module : polycopié papier, pages web du cours en ligne, et illustrations interactives et QCM.
- Répondez aux questions sur la copie et exécutez les commandes sur votre compte.
- En plus des règles usuelles des contrôles, il est *strictement interdit* de :
  - Commencer le contrôle avant le signal de démarrage de l'enseignant
  - Continuer le contrôle après le signal d'arrêt de l'enseignant
  - Naviguer sur le web ailleurs que dans les pages du module
  - Communiquer de l'information par tout moyen électronique : courrier, fichier...
- Un enseignant est présent pour vous aider dans la compréhension du sujet.

Objectif général: comparer les caractéristiques de différentes machines comme la durée de fonctionnement, versions de logiciels...

1/ Préparation

Objectif: préparation de l'environnement de travail.

1. Créez un repertoire `Private` dans votre répertoire de connexion.
   *** Donnez la commande.

   ```
   mkdir Private
   ```

2. Supprimez les droits d'accès pour toute autre personne que vous sur ce répertoire `Private`.
   *** Donnez la commande.

   ```
   chmod go= Private
   ```

3. Déplacez-vous dans ce répertoire `Private`.
   *** Donnez la commande.

   ```
   cd Private
   ```

2/ Durée de fonctionnement

Objectif: le but de cette section est de récupérer la durée de fonctionnement (*uptime* en anglais), d'une machine distante.

1. Accédez à la documentation de la commande `uptime`.
   *** Donnez la commande.

   ```
   man uptime
   ```

2. Exécutez la commande `uptime`.

   ```
   uptime
   ```

3. Affichez uniquement le champ indiquant la durée de fonctionnement de la machine en une seule commande.
   *** Donnez la commande.

   ```
   uptime | cut -c14-18
   ```

   Remarquez que les informations qui nous intéressent occupent les caractères 14 à 18. Aidez-vous des pages du manuel.

4. Quelle est la durée de fonctionnement de votre machine?
   *** Votre réponse.

   ```
   3:48
   ```

5. En une seule commande, exécutez la commande `uptime` sur la machine indiquée au tableau.
   *** Donnez la commande.

   ```
   ssh b03-02 uptime
   ```

6. Créez la variable machine ayant pour valeur le nom de la machine indiquée au tableau.
   *** Donnez la commande.

   ```
   machine=b04-03
   ```

7. Ré-écrivez la commande précédente permettant d'exécuter la commande `uptime` à distance en utilisant la variable `machine`
   *** Donnez la commande.

   ```
   ssh $machine uptime | cut -c14-18
   ```

   ATTENTION: si vous n'arrivez pas à faire cette question, demandez de l'aide à l'encadrant qui notera sur votre copie qu'il vous a aidé(e).

3/ Automatisation

Objectif: le but de cette section est d'automatiser par un script la récupération de la durée de fonctionnement de machines distantes.

1. Copiez le fichier `~silber/Public/UX/Examen_2008/Scripts/script1.bash` dans votre répertoire de travail.
   *** Donnez la commande.

   ```
   cp ~silber/Public/UX/Examen_2008/Scripts/script1.bash .
   ```

2. Affichez le fichier `script1.bash`.
   *** Donnez la commande.

   ```
   cat script1.bash
   ```

3. Remplacez la chaîne de caractères MACOMMANDE_A_REMPLACER par la dernière commande de la partie précédente (question 2.7). Expliquez la marche à suivre.
   *** Votre réponse.

   ```
   Je lance mon éditeur de texte préféré, par exemple emacs. J'édite le
   fichier script1.bash pour remplacer la chaîne de caractères. Je le
   sauvegarde et quitte l'éditeur de texte.
   ```

4. Ce script exécute cette commande pour une liste de machines. En lisant le script `script1.bash`, donnez les machines concernées.
   *** Votre réponse.

   ```
   ssh1 b02-02 b03-03 b04-04
   ```

5. Quels sont les droits nécessaires pour que vous exécutiez le script `script1.bash`? Précisez lesquels et pour qui.
   *** Votre réponse.

   ```
   x pour le propriétaire du fichier script1.bash
   ```

6. Positionnez ces droits sur le fichier `script1.bash`.
   *** Donnez la commande.

   ```
   chmod u+x script1.bash
   ```

7. Exécutez le script.
   *** Donnez la commande.

   ```
   script1.bash
   ```

8. L'exécution de ce script vous demande t-elle des informations supplémentaires? Si oui, précisez lesquelles. Si non, expliquez pourquoi.
   *** Votre réponse.

   ```
   Oui, l'exécution du script nécessite de saisir mon mot de passe pour
   chacune des machines sur laquelle je me connecte. Oui, j'ai mis
   l'authentification par clé publique et l'exécution du script
   nécessite de saisir la phrase d'authentification. Non, j'ai mis
   l'authentification par clé publique et je n'utilise pas de phrase
   d'authentification.
   ```

9. Re-exécutez le script en conservant le résultat dans le fichier `resultat_uptime` dans votre répertoire de travail.
   *** Donnez la commande.

   ```
   script1.bash > resultat_uptime
   ```

ATTENTION: si vous n'arrivez pas à faire cette question, demandez de l'aide à l'encadrant qui notera sur votre copie qu'il vous a aidé(e).

4/ Analyse du fichier resultat_uptime

Objectif: le but de cette section est d'analyser les durées de fonctionnement des machines distantes.

1. Affichez le contenu du fichier `resultat_uptime`.
   *** Donnez la commande.

   ```
   cat resultat_uptime
   ```

2. Y a t-il des machines démarrées depuis plus d'un jour? Si oui, combien?
   *** Votre réponse.

   ```
   Peut-être une ou deux.
   ```

3. Affichez uniquement les durées de fonctionnement inférieures à un jour. Enregistrez ce résultat dans un fichier appelé `moins1jour` dans votre répertoire de travail.
   *** Donnez la commande.

   ```
   grep -v d resultat_uptime > moins1Jour s'il existe des machines
   démarées depuis plus d'un jour
   cp resultat_uptime moins1Jour sinon
   ```

4. Affichez le fichier `moins1jour` trié par ordre croissant par rapport à la durée de fonctionnement des machines en heure(s).
   *** Donnez la commande.

   ```
   sort -t: -n moins1jour
   ```

5/ Processus gourmand

Objectif: identifier un processus monopolisant les ressources.

1. Lancez le programme `~silber/Public/UX/Examen_2008/Programmes/ProcProg` en arrière-plan.
   *** Donnez la commande.

   ```
   ~silber/Public/UX/Examen_2008/Programmes/ProcProg &
   ```

2. Donnez son numéro de processus et son numéro de job et les commandes correspondantes
   *** Donnez la commande.

   ```
   ps u | grep ProcProg
   jobs
   ```

3. À partir des commandes précédentes, indiquez les pourcentages de CPU et de mémoire utilisés par ce processus.
   *** Votre réponse.
4. Affichez sur une seule ligne le processus consommant le plus de CPU.
   *** Donnez la commande.

   ```
   ps u | sort -r -k 3,3 | head -2  | tail -1
   ```

   Suggestion : faire un tri sur le champ CPU dans le résultat de la commande précédente

5. Détruisez ce processus
   *** Donnez la commande.

   ```
   killall ProcProg
   ```

6/ Récupération d'autres informations

Objectif: le but de cette section est d'utiliser le script précédent pour récupérer d'autres informations sur les machines distantes.

6.1/ Version de navigateur Web

1. En utilisant la page manuelle, déterminez la commande permettant de connaître la version de Firefox utilisée
   *** Donnez la commande.

   ```
   firefox --version
   ```

2. Quelle est la version de firefox?
   *** Votre réponse.

   ```
   Mozilla Firefox 3.0.2
   ```

3. Seules les trois premières informations du résultat de la commande nous intéressent (Mozilla Firefox XX.XX.XX). Donnez la commande permettant d'afficher uniquement ces trois informations.
   *** Donnez la commande.

   ```
   firefox --version | cut -d',' -f1
   ```

4. Remplacez dans le script `script1.bash` la commande `uptime` par la commande précédente.
5. Exécutez le script `script1.bash` et récupérez le résultat dans le fichier `resultat_firefox`.
   *** Donnez la commande.

   ```
   script1.bash > resultat_firefox
   ```

6. Pour chaque version différente, affichez le nombre de machines correspondant.
   *** Donnez la commande.

```
sort resultat_firefox | uniq -c
```

7. Affichez le nombre de versions différentes.
   *** Donnez la commande.

```
sort resultat_firefox | uniq | wc -l
```

6.2/ Nom de la machine

8. Quelle est la commande permettant de connaître le nom de la machine?
   *** Donnez la commande.

```
hostname
```

9. Remplacez dans le script `script1.bash` la commande par la commande précédente.
10. Exécutez le script `script1.bash` et récupérer le résultat dans le fichier `resultat_hostname`.
    *** Donnez la commande.

```
script1.bash > resultat_hostname
```

11. Les fichiers `moins1jour` et `resultat_hostname` ont chacun une colonne de resultat. Concaténez ces deux fichiers en un seul fichier appelé `moins1jour_complet` possédant 2 colonnes avec, sur chaque ligne, le nom de la machine suivi de la durée de fonctionnement.
    *** Donnez la commande.

```
paste resultat_hostname moins1jour > moins1jour_complet
```

12. Triez le fichier `moins1jour_complet` par durée de fonctionnement décroissante.
    *** Donnez la commande.

```
sort -nr -k 2 moins1jour_complet
```

13. En reprenant la commande précédente, affichez la ligne correspondant à la durée de fonctionnement la plus élevée.
    *** Donnez la commande.

```
sort -nr -k 2 moins1jour_complet | head -1
```

14. A quelle machine cela correspond t-il?
    *** Votre réponse.

```
b03-08
```

CSC 3002 - Enoncé du Contrôle Continu d'Algorithmique
Mercredi 22 octobre 2008

Durée : 1 heure
Document autorisé : le polycopié distribué en cours
Veuillez préciser votre groupe de TP à côté de vos nom et prénom

Soit une date exprimée sous la forme d'un triplet de valeurs (*jour*, *mois* et *année* de type Naturel) ; on vous propose de calculer le quantième associé à cette date défini de la façon suivante. C'est un naturel dont les trois chiffres de poids faible représentent le numéro d'ordre du jour dans l'année et les autres chiffres l'année.
Ainsi le quantième correspondant au 2 mars 2007 est égal à 2007061 car le numéro d'ordre du 2 mars dans l'année 2007 est 061 = 31 (pour janvier) + 28 (pour février) + 2.
Par contre, le quantième correspondant au 2 mars 2008 est égal à 2008062 car le numéro d'ordre du 2 mars dans l'année 2008 est 062 = 31 (pour janvier) + 29 (pour février car 2008 est bissextile) + 2.

Nous en profiterons pour déterminer également le numéro de semaine dans l'année correspondant à cette date.

Mais définissons d'abord le type *Date* :

type Date = **structure**
    jour : Naturel
    mois : Naturel
    année : Naturel
fstruct

Vous devez définir en **langage algorithmique** une procédure *calculerQuantièmeEtNuméroSemaine* qui détermine le quantième ainsi que le numéro de semaine dans l'année associés à une date. Cette procédure prend donc un paramètre en **donnée** *date* de type *Date* et deux paramètres en **résultat** *quantième* et *numéroSemaine* de type Naturel. Vous disposez d'une fonction *estBissextile* dont voici la signature :

fonction estBissextile (a : Naturel) : Booléen

Cette fonction renvoie la valeur VRAI si l'année *a* est bissextile, FAUX sinon.

Définissez également la fonction *principale* qui permettra à l'utilisateur de saisir le contenu d'un objet de type *Date* et qui affichera le quantième ainsi que le numéro de semaine dans l'année correspondant à cette date.

Adoptez une démarche descendante ; le problème s'y prête fort bien.

Respectez également les consignes dispensées par votre enseignant durant la partie algorithmique du module CSC 3002, à savoir :

- les variables doivent être définies avant toute utilisation,
- la syntaxe et les mots réservés de notre langage algorithmique doivent être respectés,
- l'appel d'une fonction ou d'une procédure doit être cohérent par rapport à sa définition : ordre et typage des paramètres ainsi que le type de la valeur de retour pour une fonction,

– veillez à la lisibilité de votre algorithme :

  – l'indentation de votre texte doit mettre en évidence l'action conditionnée par une structure de contrôle,

  – le choix des identificateurs facilite la lecture de l'algorithme,

  – les commentaires, si nécessaire, permettent de mieux comprendre certaines actions.

CSC 3002 - Corrigé du Contrôle Continu d'Algorithmique

Enoncé :

- **données** date : Date
- **résultat** quantième, numéroSemaine : Naturel
- **solution intuitive** :
  - on calcule la somme des jours des mois précédents le mois courant en tenant compte des années bissextiles,
  - on rajoute le nombre de jours dans le mois courant pour obtenir le numéro du jour dans l'année,
  - on rajoute au numéro du jour dans l'année 1000 fois l'année pour obtenir le quantième,
  - on divise le numéro du jour dans l'année par 7 et on rajoute 1 pour obtenir le numéro de semaine dans l'année (on ne tient pas compte qu'une semaine commence un lundi car il faudrait connaître le jour de la semaine correspondant au 1er janvier).

Algorithme :

Définition de la fonction *principale* :

```
fonction principale ( ) : CodeRetour

    date : Date
    quantième, numéroSemaine : Naturel

    afficher ( "Saisir le jour, le mois et l'année : " )
    saisir ( date.jour, date.mois, date.année )

    // Le calendrier grégorien commence en 1582 dans les pays d'obédience catholique.

    si date.année < 1582 ou date.mois < 1 ou date.mois > 12 ou date.jour < 1
        ou date.jour > nbJoursDuMois ( date.mois , date.année ) alors

        afficher ( "La date est incorrecte" )
        allerAlaLigne ( )
        retourner KO

    fsi

    calculerQuantièmeEtNuméroSemaine ( date, quantième, numéroSemaine )

    afficher ( "Le quantième correspondant au ", date.jour, "/", date.mois, "/", date.année, " est égal à ",
               quantième )
    allerAlaLigne ( )
    afficher ( "Le numéro de semaine vaut ", numéroSemaine )
    allerAlaLigne ( )

    retourner OK

ffct principale
```

Définition de la procédure *calculerQuantièmeEtNuméroSemaine* :

```
procédure calculerQuantièmeEtNuméroSemaine ( donnée date : Date
                                             résultat quantième, numéroSemaine : Naturel )

    numéroJour = 0 : Naturel // pour stocker le numéro de jour dans l'année

    // on calcule la somme des jours des mois précédents le mois courant
    // en tenant compte des années bissextiles

    pour m = 1 : Naturel à date.mois - 1
        numéroJour ← numéroJour + nbJoursDuMois ( m, date.année )
    fpour m

    numéroJour ← numéroJour + date.jour // on rajoute le nombre de jours dans le mois courant

    quantième ← 1000 × date.année + numéroJour
    numéroSemaine ← ( numéroJour div 7 ) + 1

fproc calculerQuantièmeEtNuméroSemaine
```

Définition de la fonction *nbJoursDuMois* avec un schéma *si* :

```
fonction nbJoursDuMois ( m, a : Naturel ) : Naturel

    si m = 2 alors
        si estBissextile ( a ) alors
            retourner 29
        sinon
            retourner 28
        fsi
    sinon
        si m = 4 ou m = 6 ou m = 9 ou m = 11 alors
            retourner 30
        sinon
            retourner 31
        fsi
    fsi

ffct nbJoursDuMois
```

Redéfinition de la fonction *nbJoursDuMois* avec un schéma *cas où* :

```
fonction nbJoursDuMois ( m, a : Naturel ) : Naturel

    cas où  m vaut
        2 :     si estBissextile ( a ) alors
                    retourner 29
                sinon
                    retourner 28
                fsi
```

```
        4 :     retourner 30
        6 :     retourner 30
        9 :     retourner 30
        11 :    retourner 30
        autre : retourner 31
    fcas

ffct nbJoursDuMois
```

Définition de la fonction *estBissextile* :

```
fonction estBissextile ( a : Naturel ) : Booléen

    si a mod 4 ≠ 0 alors
        retourner FAUX
    sinon si a mod 100 ≠ 0 alors
            retourner VRAI
        sinon si a mod 400 ≠ 0 alors
                retourner FAUX
            sinon
                retourner VRAI
            fsi
        fsi
    fsi

ffct estBissextile
```

CSC 3002 - Corrigé du Contrôle Continu de Langage C

Exercice 1 (sur 7 points)

le fichier motDePasse.c corrigé

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h> // pour le prototype de la fonction strcmp

int main ( ) {

  // La définition char *chaine; ne réserve pas d'espace mémoire
  // pour stocker les caractères de cette chaîne. On aurait pu aussi
  // écrire : char *chaine = malloc ( 80 * sizeof ( char ) );
  // De plus, la variable motDePasse doit être typée char * et non char

  char chaine[80], *motDePasse = "monMotDePasse";

  printf ( "Rentrez votre mot de passe : " );
  scanf ( "%s", chaine );

  // La comparaison chaine == motDePasse compare deux adresses.
  // Pour comparer le contenu de ces deux chaînes, il faut utiliser
  // la fonction strcmp.

  if ( strcmp ( chaine, motDePasse ) == 0 ) { // Il manquait l'accolade
                                              // ouvrante
    printf ( "Vous pouvez passer.\n" );
    return EXIT_SUCCESS;
  } // et l'accolade fermante

  else { // Il manquait l'accolade ouvrante

    printf ( "Désolé, revenez une autre fois.\n" );
    return EXIT_FAILURE;
  } // et l'accolade fermante
}
```

Exercice 2 (sur 6 points)

Affichage produit par l'exécutable issu du fichier queFaitElle.c

```
Après le premier appel de la fonction queFaitElle   : a = 1, b = 0, c = 1

Après le deuxième appel de la fonction queFaitElle  : a = 1, b = 0, c = 0

Après le troisième appel de la fonction queFaitElle : a = 0, b = 1, c = 0
```

Exercice 3 (sur 7 points)

makefile

```
OBJETS= monAppli.o module1.o module2.o module3.o

monAppli : $(OBJETS)
        gcc -Wall -L$(HOME)/lib -lrationnel $(OBJETS) -o monAppli

monAppli.o : monAppli.c module1.h module2.h
        gcc -Wall -c -I$(HOME)/include monAppli.c

module1.o : module1.c module1.h
        gcc -Wall -c -I$(HOME)/include module1.c

module2.o : module2.c module2.h module3.h
        gcc -Wall -c -I$(HOME)/include module2.c

module3.o : module3.c module3.h
        gcc -Wall -c -I$(HOME)/include module3.c
```

CSC 3002 - Enoncé du Contrôle Continu de Langage C
Vendredi 9 janvier 2009

Durée : 1 heure
Document autorisé : le polycopié distribué en cours

Exercice 1 (sur 7 points)

Le programme ci-dessous contient plusieurs erreurs et oublis qui font qu'il ne « passe » pas à la compilation. De plus, si on le corrigeait pour qu'il soit compilable, il resterait encore des problèmes à l'exécution.

motDePasse.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main ( ) {

  char *chaine, motDePasse = "monMotDePasse";

  printf ( "Rentrez votre mot de passe : " );
  scanf ( "%s", chaine );

  if ( chaine == motDePasse )

    printf ( "Vous pouvez passer.\n" );
    return EXIT_SUCCESS;

  else

    printf ( "Désolé, revenez une autre fois.\n" );
    return EXIT_FAILURE;
}
```

Vous devez, **sur la feuille de réponses fournie**, récrire ce programme de façon à ce qu'il soit compilable et qu'il s'exécute correctement.

Exercice 2 (sur 6 points)

Le programme ci-dessous compile et s'exécute normalement. Vous devez simplement écrire, **sur la feuille de réponses fournie**, ce qui s'affiche dans la fenêtre *shell* lorsqu'on l'exécute.

queFaitElle.c (début)

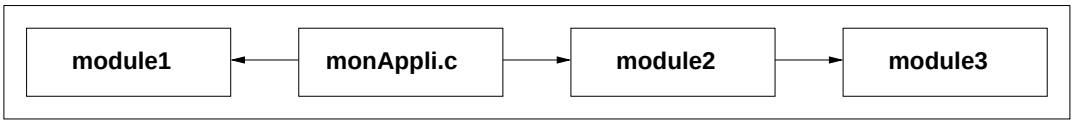
```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>


int queFaitElle ( int n, int *m );
```

queFaitElle.c (fin)

```
int main ( ) {

  int a = 1, b = 1, c = 1;

  c = queFaitElle ( a, &b );
  printf ( "Après le premier appel de la fonction queFaitElle   : " );
  printf ( "a = %d, b = %d, c = %d\n", a, b, c );
  a = queFaitElle ( b, &c );
  printf ( "Après le deuxième appel de la fonction queFaitElle  : " );
  printf ( "a = %d, b = %d, c = %d\n", a, b, c );
  b = queFaitElle ( c, &a );
  printf ( "Après le troisième appel de la fonction queFaitElle : " );
  printf ( "a = %d, b = %d, c = %d\n", a, b, c );
  return EXIT_SUCCESS;
}

int queFaitElle ( int n, int *m ) {

  *m = *m - 1;
  n = *m * 2;
  return *m + 1;
}
```

Exercice 3 (sur 7 points)

Vous allez devoir créer le fichier *makefile* correspondant à l'application dont l'architecture correspond au schéma ci-dessous.



Comme vous pouvez le voir, cette application est composée d'un programme principal (*monAppli.c*) contenant la définition de la fonction *main* et de trois modules. On rappelle qu'un module est constitué d'un fichier d'en-tête (*.h*) et d'un source C (*.c*). Ainsi le *module1* correspond aux deux fichiers *module1.h* et *module1.c*. Ces sept fichiers se trouvent dans votre répertoire courant.

Une fléche entre deux blocs (programme principal ou module) indique qu'au moins une fonction du bloc extrémité initiale de la fléche appelle une fonction du bloc extrémité terminale de la fléche.

D'autre part le programme principal et les trois modules utilise le type abstrait *Rationnel*. Ce type est implémenté dans la bibliothèque *librationnel.so* dont l'interface est le fichier *rationnel.h*. Le fichier *librationnel.so* est stocké dans le répertoire *lib* sous votre répertoire de connexion. Le fichier *rationnel.h* est stocké dans le répertoire *include* sous votre répertoire de connexion.

Ecrivez, sur la feuille de réponses fournie, le fichier *makefile* pour produire l'application *monAppli*.

CSC 3002 - Corrigé du Contrôle Final 1

Exercice d'algorithmique (sur 7 points)

Enoncé :

- **données** nb : Naturel
- **résultat** affichage dans la fenêtre *shell* des nombres unitairement parfaits inférieurs ou égaux à *nb*.

Algorithme :

Définition de la fonction *principale* :

```
fonction principale ( ) : CodeRetour

    nb : Naturel

    afficher ( "Saisir un nombre supérieur à 1 : " )
    saisir ( nb )

    si nb < 1 alors
        afficher ( "La saisie est incorrecte" )
        allerAlaLigne ( )
        retourner KO
    fsi

    afficherNombresUnitairementParfaits ( nb )

    retourner OK

ffct principale
```

Définition de la procédure *afficherNombresUnitairementParfaits* :

```
procédure afficherNombresUnitairementParfaits ( donnée nb : Naturel )

    pour i = 1 : Naturel à nb
        si estUnitairementParfait ( i ) alors
            afficher ( i )
        fsi
    fpour i

    allerAlaLigne ( )

fproc afficherNombresUnitairementParfaits
```

Définition de la fonction *estUnitairementParfait* :

```
fonction estUnitairementParfait ( nombre : Naturel ) : Booléen

    somme = 0 : Naturel // somme des diviseurs
```

```
    pour diviseur = 1 : Naturel à nombre div 2

        si nombre mod diviseur = 0 et pgcd ( diviseur, nombre div diviseur ) = 1 alors
            somme ← somme + diviseur

        fsi
    fpour diviseur

    si somme = nombre alors
        retourner VRAI
    sinon
        retourner FAUX // ou plus simplement retourner ( somme = nombre )
    fsi

ffct estUnitairementParfait
```

Définition de la fonction *pgcd* :

```
fonction pgcd ( a , b : Naturel ) : Naturel

    si b = 0 alors
        retourner a
    sinon
        retourner pgcd ( b , a mod b )
    fsi

ffct pgcd
```

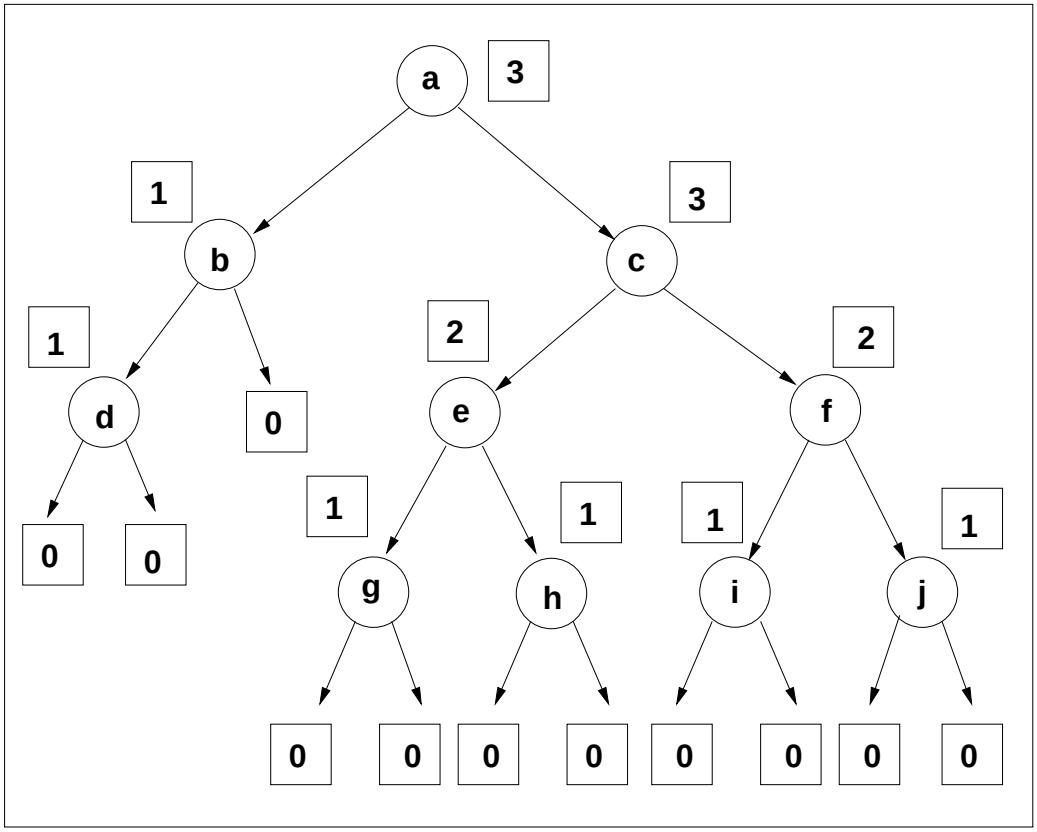
Exercice de langage C (sur 7 points)

Affichage produit par l'exécutable issu du fichier expressions.c

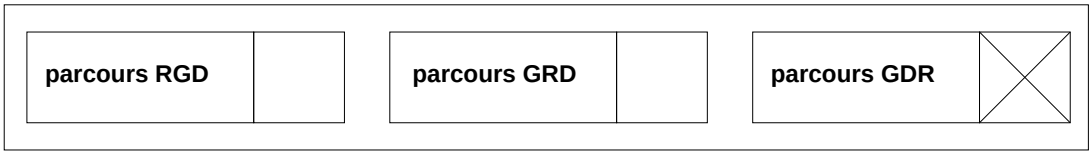
```
*p + 2 = 3

*( p + 2 ) = 7

*(p + *p + 2 ) = 10

*(p + *( p + 2 ) ) = 22

*(p + *( p + 2 ) - t[1] ) = 10

&t[7] - p + 1 = 8

&t[7] - &( *( p + 1 ) ) = 6

&t[7] - &( *( p + *( p + 1 ) ) ) = 3
```

Exercice de structures de données (sur 6 points)

1. Les valeur de Φ de l'arbre figurant ci-dessous.



2. Le parcours à utiliser pour calculer le nombre de Strahler d'un arbre binaire.



Il faut bien sûr descendre dans le sous-arbre gauche, puis dans le sous-arbre droit pour pouvoir calculer le nombre de Strahler du nœud courant.

3. La fonction *nombreDeStrahler*.

```
static int max ( int n, int m ) {

  if ( n > m )
    return n;
  return m;
}
```

```
int nombreDeStrahler ( Arbre a ) {

  if ( estArbreVide ( a ) )
    return 0;

  int nbGauche = nombreDeStrahler ( a->sag );
  int nbDroit = nombreDeStrahler ( a->sad );

  if ( nbGauche == nbDroit )
    return 1 + nbGauche;
  else
    return max ( nbGauche, nbDroit );
}
```

CSC 3002 - Enoncé du Contrôle Final 1
Vendredi 30 janvier 2009

Durée : 2 heures
Document autorisé : le polycopié distribué en cours

Exercice d'algorithmique (sur 7 points)

Si *d* est un diviseur de *n* et s'il est premier avec [1] *n* **div** *d*, c'est un diviseur unitaire de *n*. Un nombre unitairement parfait est égal à la somme de ses diviseurs unitaires. Prenons comme exemple le nombre 60 :

diviseur de 60 (hors 60)	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30
60 **div** diviseur	60	30	20	15	12	10	6	5	4	3	2
premiers entre eux ?	oui	non	oui	oui	oui	non	non	oui	oui	oui	non
diviseur retenu	1		3	4	5			12	15	20	
leur somme	60										

On ne connait que cinq nombres unitairement parfaits : 6, 60, 90, 87360 et 1,4582... 10^{23}. On conjecture qu'il sont en nombre fini.

Vous devez, **sur la feuille de réponses fournie**, définir en **langage algorithmique** une procédure *afficherNombresUnitairementParfaits* qui prend en donnée un paramètre *nb* de type naturel et qui affiche dans la fenêtre *shell* les nombres unitairement parfaits inférieurs ou égaux à *nb*.
Définissez également la fonction *principale* qui permettra à l'utilisateur de saisir un naturel et qui appelera la procédure *afficherNombresUnitairementParfaits*.

Adoptez une démarche descendante ; le problème s'y prête fort bien.

Exercice de langage C (sur 7 points)

Le programme ci-dessous compile et s'exécute normalement. Vous devez simplement écrire, **sur la feuille de réponses fournie**, ce qui s'affiche dans la fenêtre *shell* lorsqu'on l'exécute.

expressions.c (début)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main ( ) {
```

[1] a est premier avec b si et seulement si pgcd (a, b) = 1

expressions.c (fin)

```
  int t[] = { 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 };
  int *p = t;

  printf ( "*p + 2 = %d\n", *p + 2 );
  printf ( "*( p + 2 ) = %d\n", *( p + 2 ) );
  printf ( "*(p + *p + 2 ) = %d\n", *(p + *p + 2 ) );
  printf ( "*(p + *( p + 2 ) ) = %d\n", *(p + *( p + 2 ) ) );
  printf ( "*(p + *( p + 2 ) - t[1] ) = %d\n", *(p + *( p + 2 ) - t[1] ) );
  printf ( "&t[7] - p + 1 = %d\n", &t[7] - p + 1 );
  printf ( "&t[7] - &( *( p + 1 ) ) = %d\n", &t[7] - &( *( p + 1 ) ) );
  printf ( "&t[7] - &( *( p + *( p + 1 ) ) ) = %d\n",
           &t[7] - &( *( p + *( p + 1 ) ) ) );

  return EXIT_SUCCESS;
}
```

Exercice de structures de données (sur 6 points)

Le nombre de Strahler a été initialement défini sur les arbres binaires par des hydrogéologues, pour décrire la forme des bassins fluviaux. Il a été ensuite utilisé pour déterminer l'espace mémoire nécessaire à l'évaluation d'une expression arithmétique présentée sous la forme d'un arbre binaire.
Soit *a* un arbre binaire, on désignera par *sag(a)* (resp. *sad(a)*) le sous-arbre gauche (resp. droit) de *a*. Le nombre de Strahler de l'arbre binaire *a* est défini par :

$$\Phi(a) = \begin{cases} 0 & si\ a\ est\ vide \\ max(\Phi(sag(a)), \Phi(sad(a))) & si\ a\ est\ non\ vide\ et\ \Phi(sag(a)) \neq \Phi(sad(a)) \\ 1 + \Phi(sag(a)) & si\ a\ est\ non\ vide\ et\ \Phi(sag(a)) = \Phi(sad(a)) \end{cases}$$

1. Inscrivez les valeur de Φ dans les carrés à coté de chaque nœud de l'arbre binaire figurant **sur la feuille de réponses fournie**.
2. Cochez **sur la feuille de réponses fournie** le parcours à utiliser pour calculer le nombre de Strahler d'un arbre binaire (il y a une seule réponse correcte).
3. Définissez **sur la feuille de réponses fournie** et **en langage C** la fonction *nombreDeStrahler* dont voici le prototype :

   ```
   int nombreDeStrahler ( Arbre a );
   ```

   On rappelle ci-dessous la définition du type *Arbre* :

   ```
   // Le type Noeud definit la representation d'un element de l'arbre
   typedef struct noeud {  int valeur;
                           struct noeud *sag;
                           struct noeud *sad; } Noeud;

   // Le type Arbre definit la representation d'un arbre binaire de recherche
   typedef Noeud *Arbre;
   ```

   Vous disposez également du type Booléen et de la fonction *estArbreVide* dont voici respectivement la définition et la déclaration :

   ```
   typedef enum { FAUX,VRAI } Booleen;

   Booleen estArbreVide ( Arbre a );
   ```

CSC 3002 - Corrigé du Contrôle Final 2

Exercice d'algorithmique (sur 6 points)

Enoncé :

- **données** nb : Naturel
- **résultat** un booléen égal à VRAI si nb est un nombre de Harshad, à FAUX sinon.

Algorithme :

Définition de la fonction *principale* :

```
fonction principale ( ) : CodeRetour

    n : Naturel

    afficher ( "Saisir un entier strictement positif : " )
    saisir ( n )

    afficher ( n, " " )
    si estNombreDeHarshad ( n ) alors
        afficher ( "est" )
    sinon
        afficher ( "n'est pas" )
    fsi
    afficher ( " un nombre de Harshad." )
    allerAlaLigne

    retourner OK

ffct principale
```

Définition de la fonction *estNombreDeHarshad* :

```
fonction estNombreDeHarshad ( nb : Naturel ) : Booléen

    si nb mod sommeChiffres ( nb ) = 0 alors
        retourner VRAI
    fsi
    retourner FAUX

ffct estNombreDeHarshad
```

Définition de la fonction *sommeChiffres* :

```
fonction sommeChiffres ( nombre : Naturel ) : Naturel

    somme = 0 : Naturel // somme des chiffres
```

```
    tant que nombre > 0 faire
        somme ← somme + nombre mod 10
        nombre ← nombre div 10
    ftq

    retourner somme

ffct sommeChiffres
```

Exercice de langage C (sur 4 points)

Affichage produit

```
1 : m = 41, n = 20, *p = 41, *q = 41
2 : m = 17, n = 20, *p = 17, *q = 17, **x = 17
```

Exercice de structures de données (sur 10 points)

1. Définition de la fonction *calculerMoyenneEcartType*

```
void calculerMoyenneEcartType ( Liste l, double *pMoy, double *pET ) {

  int nbValeurs = 0 // nombre de valeurs
  double somme = 0 // somme des valeurs
  double sommeCarres = 0 // somme des carres des valeurs

  while ( !estListeVide ( l ) {

    double val = l->valeur;

    nbValeurs++;
    somme += val;
    sommeCarres += val * val;
    l = l->lien;
  }
  *pMoy = somme / nbValeurs;
  *pET = sqrt ( sommeCarres / nbValeurs - (*pMoy) * (*pMoy) );
}
```

2. Si on stocke dans une structure, en plus du pointeur sur le premier élément de la liste, le nombre d'éléments, la somme des valeurs et la somme des carrés des valeurs, on peut recalculer en en temps constant la moyenne et l'écart-type.

   Redéfinition du type *Liste*

```
typdef struct { int nbElements; // pour stocker le nombre d'elements
                double somme; // pour stocker la somme des valeurs
                double sommeCarres; // pour stocker la somme
```

```
                                    // des carres des valeurs
                Element *liste; } Liste;
```

3. Définition de la fonction *nouvelleListe*

```
Liste nouvelleListe ( void ) {

  Liste liste;

  liste.nbElements = 0;
  liste.somme = 0;
  liste.sommmeCarres = 0;
  liste.liste = NULL;

  return liste;
}

// appel : Liste liste = nouvelleListe ();
```

4. Définition de la fonction *inserer*

```
// prototype de la fonction enlister

Element *enlister ( Element *ptrElement, double val );

Liste inserer ( Liste liste, double val ) {

  liste.nbElements++;
  liste.somme += val;
  liste.sommmeCarres += val * val;
  liste.liste = enlister ( liste.liste, val );

  return liste;
}
```

5. Définition de la fonction *supprimer*

```
// prototype de la fonction delister

Element *delister ( Element *ptrElement, double val );

Liste supprimer ( Liste liste, double val ) {

  liste.nbElements--;
  liste.somme -= val;
  liste.sommmeCarres -= val * val;
  liste.liste = delister ( liste.liste, val );

  return liste;
}
```

CSC 3002 - Enoncé du Contrôle Final 2
Vendredi 3 avril 2009

Durée : 2 heures
Document autorisé : le polycopié distribué en cours

Exercice d'algorithmique (sur 6 points)

Un nombre est dit de *Harshad* s'il est divisible par la somme de ses chiffres. *Harshad* n'est pas un patronyme ; c'est un terme qui signifie grande joie en sanskrit.
Prenons par exemple le nombre 18. La somme de ses chiffres est égale à 9 et 18 est divisible par 9.
Voici les vingt premiers nombres de *Harshad* : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42.
Vous devez définir en **langage algorithmique** une fonction *estNombreDeHarshad* qui prend un paramètre *nb* de type naturel et qui renvoie un booléen égal à VRAI si *nb* est un nombre de *Harshad*, à FAUX sinon.
Définissez également la fonction *principale* qui permettra à l'utilisateur de saisir un naturel, appelera la fonction *estNombreDeHarshad* et affichera le résultat dans la fenêtre *shell* de manière lisible.

Exercice de langage C (sur 4 points)

Le programme ci-dessous compile et s'exécute normalement. Vous devez simplement écrire sur votre copie, ce qui s'affiche dans la fenêtre *shell* lorsqu'on l'exécute.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main ( ) {

  int m = 41, n, *p, *q, **x;

  p = &m;
  q = &n;
  *q = m / 2;
  q = p;
  printf ( "1 : m = %d, n = %d, *p = %d, *q = %d\n", m, n, *p, *q );

  x = &q;
  m = n + 1;
  **x = 17;
  *p = **x;
  *p = *q;
  printf ( "2 : m = %d, n = %d, *p = %d, *q = %d, **x = %d\n",
           m, n, *p, *q, **x );

  return EXIT_SUCCESS;
}
```

Exercice de structures de données (sur 10 points)

Considérons une suite de valeurs réelles ; cette suite, de longueur indéterminée, peux contenir la même valeur plusieurs fois. Elle est stockée sous forme de liste linéaire **non triée** gérée par pointeurs.
Voici un rappel en langage C de la définition du type *Element* adapté au stockage des valeurs de cette suite et du type *Liste* :

```
typedef struct element { double valeur;
                         struct element *lien; } Element;

typedef Element *Liste;
```

1. Vous devez définir **en langage C** une fonction *calculerMoyenneEcartType* qui permettra de déterminer la moyenne et l'ecart-type de cette suite de valeurs. Voici le prototype de cette fonction :

   ```
   void calculerMoyenneEcartType ( Liste l, double *pMoy, double *pET );
   ```

   Vous disposez de la fonction *estListeVide* (vous n'avez pas à la définir) dont voici le prototype :

   ```
   Booleen estListeVide ( Liste l );
   ```

   Cette fonction renvoie la valeur VRAI si la liste *l* est vide, FAUX sinon.
   On vous rappelle également que la bibliothèque mathématique de l'environnenemt du langage C vous fournit la fonction *sqrt* qui renvoie la racine carrée d'une valeur de type *double* passée en argument. Cette fonction est déclarée dans le fichier *math.h*.

   ```
   double sqrt(double x);
   ```

2. Supposons que cette liste contienne un grand nombre de valeurs et qu'il y ait beaucoup d'opérations d'insertion et de suppression. On voudrait pouvoir recalculer le plus rapidement possible la moyenne et l'écart-type après chaque opération d'insertion ou de suppression.
   Sans modifier le type *Element*, redéfinissez le type *Liste* comme une structure de façon à optimiser le recalcul de la moyenne et de l'écart-type.
3. Lorsqu'on crée une nouvelle liste, il faut initialiser les champs de cette structure. Définissez la fonction *nouvelleListe* dont voici le prototype :

   ```
   Liste nouvelleListe ( void );
   ```

4. Dans le cas d'une insertion d'une valeur dans la liste, il faut modifier les champs de cette structure. Définissez la fonction *inserer* dont voici le prototype :

   ```
   Liste inserer ( Liste liste, double val );
   ```

   Cette fonction doit appeler la fonction *enlister* dont voici le prototype :

   ```
   Element *enlister ( Element *ptrElement, double val );
   ```

   Vous n'avez pas à définir cette fonction.
5. Il en est de même dans le cas d'une suppression d'une valeur de la liste. Définissez la fonction *supprimer* dont voici le prototype :

   ```
   Liste supprimer ( Liste liste, double val );
   ```

   Cette fonction doit appeler la fonction *delister* dont voici le prototype :

   ```
   Element *delister ( Element *ptrElement, double val );
   ```

   Vous n'avez pas à définir cette fonction.

Nom:	*Prénom :*	*Note :*
		Exercice 1 : sur 9 / pts
		Exercice 2 : sur 6 / pts
		Exercice 3 : sur 5 / pts

Contrôle Final 1
Module NET 3001 - EI1
Introduction au monde de la télécommunication
CORRIGE

Remarque : Les 3 exercices sont indépendants les uns des autres.

Le 16 janvier 2009	*Sans documents & sans calculatrice*	*Durée : 1h 30 mn*

Exercice 1 : Réseau RNIS - 9 points – 6 questions - ~ 40 mn

L'école d'ingénieurs «**Télécom Sud Paris**» située à EVRY doit régulièrement échanger des fichiers et programmer des visioconférences via le réseau RNIS, avec l'école « **Télécom Bretagne »** située à BREST. Pour cela, chaque site est équipé d'un groupement d'accès de base. Le site d'EVRY possède 6 accès de base « standard » alors que le site de BREST possède 6 accès de base «DUO». La figure 1 représente l'installation physique de chaque site distant.

Question 1 : Complétez directement cette figure 1 avec la liste de termes suivants impliquant les équipements obligatoires et/ou facultatifs d'une Installation Terminale d'Abonné (ITA) normalisée. **Sur 2 points (20 cases ➔ 0,1 point/ case)**

Attention certains termes peuvent être repris plusieurs fois, d'autres pas du tout !

Liste répertoriée aussi sur la figure 1 : *PC classique non RNIS, PC avec carte RNIS, modem analogique 56K, TNR, TNR-G, TL, TC, PABX, prise RJ45, interfaces R, S, T, U, V, téléphone*

analogique, téléphone RNIS, terminal de visioconférence, adaptateur de terminal, fax analogique, fax numérique.

Les transferts de fichiers journaliers d'EVRY à BREST et le transfert de BREST à EVRY se font le jour au débit normalisé de **64 =2^6 Kbits/s.**

De / à	EVRY	BREST
EVRY	Aucun	1 TF de **2^{12} Ko** tous les jours ouvrables
BREST	1 TF de **1 Mo** toutes les fins de mois.	Aucun

Question 2 : Exprimez le volume V1 = 2 ^{12} Ko en bits sous la forme 2^x 10^y

$V1 = 2^{12} \times 10^3 \times 2^3 = 2^{15} \times 10^3$ bits 0,5 pt

Question 3 : Exprimez le volume V2 = 1 Mo en bits sous la forme 2^x 10^y

$V2 = 1 \times 10^6 \times 2^3 = 2^3 \times 10^6$ bits 0,5 pt

Question 4 : Exprimez le débit D = 2^6 Kbits/s en bits par seconde sous la forme 2^x 10^y

$D = 2^6 \times 10^3$ bits/s 0,5 pt

Question 5 : Estimez les temps de transfert T1 et T2 sous forme littérale en fonction des données V1, V2, et D.

$T1 = V1/D$ 0,5 pt

$T2 = V2/D$ 0,5 pt

Question 6 : En déduire le coût mensuel total en € HT correspondant au trafic data de l'entreprise. Vous détaillerez les étapes de calculs, ferez apparaître les sommes

nécessaires sans chercher à tout prix à donner le résultat final (sauf ceux qui savent estimer sans calculette !!) **sur 4,5 points (1 TF de Evry à Brest : 1,5 pt, 1 TF de Brest à Evry : 1,5 pt, Abonnements x6 : 1 pt, GTR x6 accès x 2 sites : 0,5 pt)**

Dans le sens EVRY ➔ BREST :

6 abonnements standard: 6 x 34,60 € HT (1 abonnement /accès)

6 GTR : 6x9 € HT (1 GTR/accès) conseillé pour une installation de ce type en entreprise

20 TF /mois ➔ 20 x [0,08 + T1 (en secondes) x 0,04/60]

Avec T1 =512 secondes

Dans le sens BREST ➔ EVRY :

6 abonnements DUO : 6 x 35,70 € HT

6 GTR : 6 x 9 € HT

1 TF /mois ➔ 1 x [0,08 + T2 (en secondes) x 0,04/60]

Avec T2= 125 secondes

Données numériques complémentaires:

- 1 Ko = 10^3 octets 1 Mo = 10^6 octets 1 Kbit = 10^3 bits 1 octet = 2^3 bits
- L'opérateur choisi par les deux écoles pour son trafic data et visioconférence est **ORANGE**,
- Le nombre de jours ouvrables par mois est arrondi à **20 jours,**
- L'Abonnement mensuel pour 1 accès de base « standard » est : **34,60 € HT,**
- L'Abonnement mensuel pour 1 accès de base « DUO » est : **35,70 € HT,**
- La Garantie de Temps de Rétablissement GTR mensuelle (option S2 : jours et heures ouvrables) est : **9 € HT** pour les 2 types d'accès,
- Le prix des communications nationales vers postes fixes en métropole avec un contrat professionnel Numéris est : **0,08 € HT** (mise en relation) + **0,04 € HT/minute** pour les 2 types d'accès.

Exercice 2: Transmission dans le cœur de réseau – 6 points – 6 questions - ~30 min

La visioconférence inter-écoles citée précédemment traverse le cœur de réseau représenté sur le schéma (figure 2). Les média (image, son) empruntent des faisceaux téléphoniques reliant les différents commutateurs traversés.

Question 1 : Complétez le schéma avec la liste de tous les termes suivants relatifs à la transmission via la norme SDH et relatifs aux sur-débits de gestion associés. **Sur 1 point (17 mots ➔ 0,06 point/ mot bien placé)**

Attention certains termes sont repris plusieurs fois.

Liste répertoriée aussi sur la figure 2: *Chemin, Répéteur-Régénérateur RR, Commutateur d'Accès CA, Commutateur de Transit CT, section de régénération, section de multiplexage, POH, RSOH, MSOH.*

Question 2 : Profitez-en pour rappeler la signification des sigles. **1 point (0,25 pt/case)**

SDH	**Synchronous Digital Hierarchy**
POH	**Path Over Head**
MSOH	**Multiplexing Section Over Head**
RSOH	**Regenerating Section Over Head**

Question 3 : Définissez les paliers de débit normalisés dans la hiérarchie numérique plésiochrone Européenne. Quel type de multiplexage est utilisé pour obtenir les paliers supérieurs ? **1 point (0,2 point/palier + 0,2 point pour temporel)**

Les 4 paliers de débit normalisés dans la PDH Eurpéenne sont :

E1= 2048 Kbit/s E2= 8 Mbits/s E3=34 Mbits/s E4=140 Mbits/s

Pour obtenir les paliers supérieurs à E1, on utilise le multiplexage temporel. On utilise 4 affluents de débit inférieur, que l'on multiplexe entre eux après les avoir parfaitement synchronisés les uns par rapport aux autres (insertion de bits de bourrage).

Question 4 : Définissez les paliers de débit normalisés dans la hiérarchie numérique synchrone. Quel type de multiplexage est utilisé pour obtenir les paliers supérieurs ? **1 point (0,2 point/palier + 0,2 point pour temporel)**

STM1= 155,520 Mbit/s **STM4=622 Mbit/s**

STM16= 2,5 Gbit/s **STM64=10 Gbit/s**

Pour obtenir les paliers supérieurs à STM-1, on utilise encore le multiplexage temporel. On utilise 4 affluents de débit inférieur, que l'on multiplexe entre eux sans avoir besoin de les synchroniser au préalable.

Question 5 : Pouvez-vous lister les avantages de la SDH par rapport à la PDH ? **1 point (0,25 point/critère : norme mondiale, souplesse, gestion, synchronisme)**

La SDH définit des paliers de débit identiques partout dans le Monde ;

Une parfaite synchronisation des affluents évite l'insertion des bits de bourrage pour pourvoir multiplexer les affluents entre eux ;

Une grande souplesse : récupération aisée d'une ressource (IT) dans la trame STM grâce aux pointeurs qui indiquent les adresses des contenus.

Une partie non négligeable de la trame est consacrée à la gestion (destinée à l'opérateur).

Question 6 : Qu'est ce que le DWDM ? A quoi sert cette technologie ? **1 point (0,2 point/critère : transmission, THD, fibre optique, mux en λ, DENSE)**

DWDM : Dense Wavelength Division Multiplexing

Cette technologie sert à transmettre les informations à **très haut débit** sur **1 fibre optique** en utilisant le principe du **multiplexage en longueur d'onde**. Le principe est de multiplexer le maximum de λ **à 2,5G**.

Dense signifie que les « dents du peigne » sont très serrées ce qui implique que l'on prend de plus en plus de λ dans une zone où l'atténuation est minimale.

Exercice 3 – Protocole D – 5 points – 10 questions - ~15 min

La capture ci-dessous réalisée en salle B104 met en évidence les messages échangés sur le canal D du RNIS. Leur étude permet de connaître l'installation du client et les services qu'il utilise. Vous êtes opérateur et vous surveillez le trafic lié à cette installation. Vous avez donc connaissance des informations suivantes. Répondez

simplement aux questions et justifiez vos réponses en surlignant directement sur la trace. **1 Q = 0,25 point/réponse + 0,25 point/justification sur la trace**

- **Q1:** Combien de terminaux sont branchés sur l'installation client ?

1 seul terminal (TEI 103) répond au contrôle d'identité sur l'installation du client au début de la capture

- **Q2:** Quel(s) type(s) de terminal (aux) ?

Le téléservice = téléphone

- **Q3:** Quel paramètre identifie un terminal sur une installation client ?

Le TEI (Terminal End Point Identifier) = 103 pour cette capture

- **Q4:** Quel paramètre identifie la nature d'un message sur le canal D?

Le SAPI (Service Access Point Identifier) ='63' au début de la capture lors de la gestion de TEI puis = '00' durant la signalisation liée à l'appel

- **Q5:** De quand date la capture ?

Capture du 13/01/2009

- **Q6:** Que s'est-il passé au début de la capture?

Demande d'identité par un poste : TEI affecté =103

Contrôle d'identité par le réseau : 1 seul poste répond : TEI 103

Suppression du TEI 102 car le téléphone a été débranché (TEI =102 au départ) puis rebranché (nouveau TEI demandé =103)

- **Q7:** Qui est à l'origine de la demande de service?

L'utilisateur 'u' dont le N° de demandeur est : 01 60 79 56 91

- **Q8:** Quel canal RNIS est utilisé pour ce service?

Canal B1 sélectionné de manière exclusive pour l'appel

- **Q9:** A quoi correspondent les messages INFORMATION?

Ils correspondent au N° composé de l'abonné demandé : 01 69 04 57 71

- **Q10:** Combien de temps précisément (au centième de seconde près) dure le service?

La communication (échange entre les 2 abonnés) est facturée entre la connexion et la déconnexion soit :

T (déconnexion)= 17 :22 :04 :07

T (connexion) = 17 :21 :38 :17

Durée : 25 secondes et 90 centièmes

Trames du 13/01/2009 (Q5) 17:20:50 au 13/01/2009 17:22:05

SAPI/TEI (Q3/Q4)

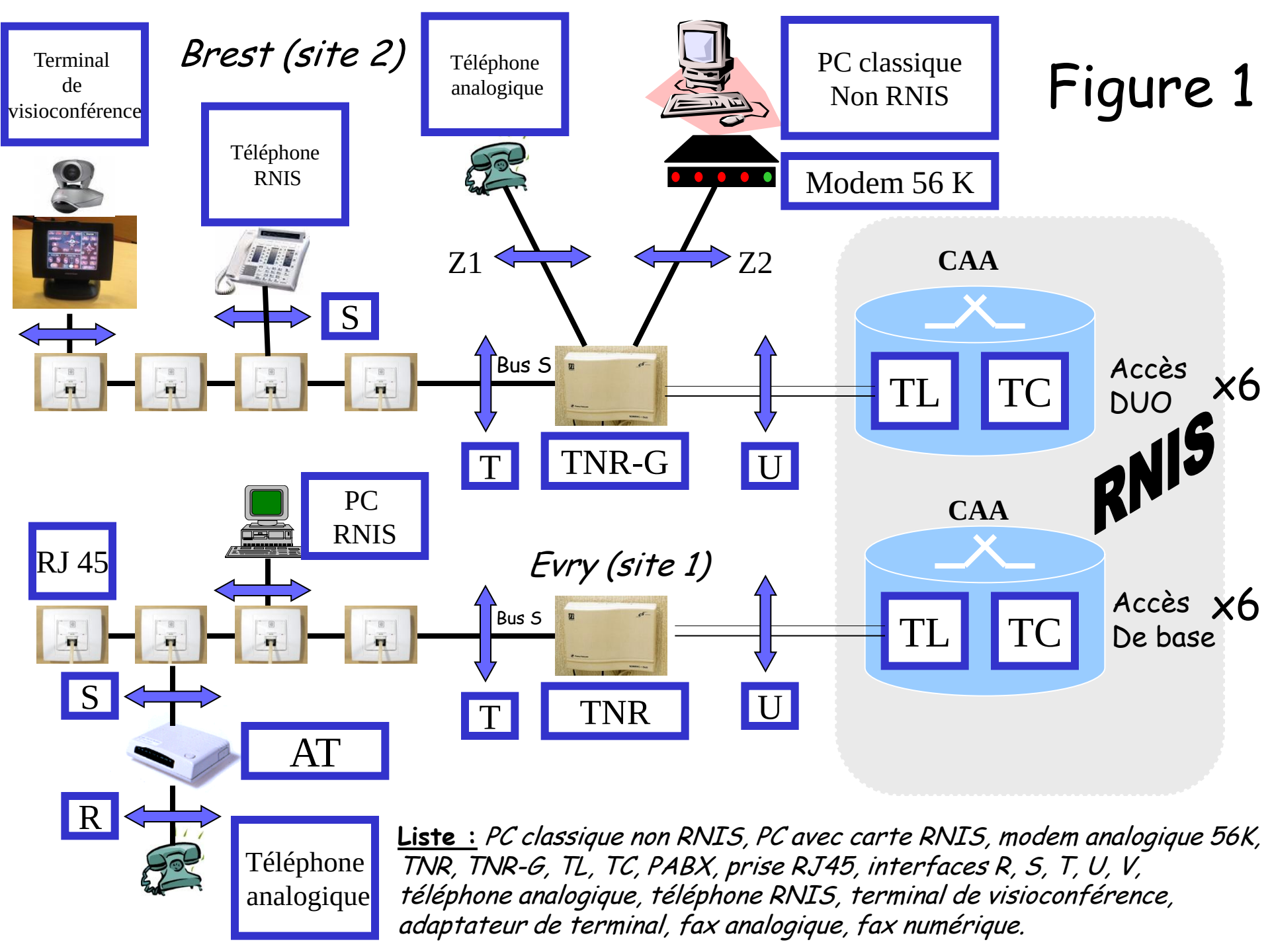
u: 13/01/09 17:20:51:53 63 127 Demande ID 127
r: 13/01/09 17:20:51:54 63 127 ID affectée 103 **(Q6) car poste rebranché**
r: 13/01/09 17:20:52:44 63 127 Dem contrôle ID 127
u: 13/01/09 17:20:52:45 63 127 Rep contrôle ID 103 : **(Q1) : 1 seul répond à l'appel**
r: 13/01/09 17:20:53:46 63 127 Dem contrôle ID 102
r: 13/01/09 17:20:55:52 63 127 Suppression ID 102 **(Q6) car poste débranché**

u: **(Q7)** 13/01/09 17:21:24:73 00 01 **ETABLISSEMENT**
NUMERO D'ORIGINE (6C) 0B 80 30 31 36 30 37 39 35 36 39 31
numéro : 0160795691 **(Q7)**
COMP. COUCHES SUP. (7D) 02 91 81
téléservice : Téléphone : **(Q2)**
r: 13/01/09 17:21:25:01 00 103 **(Q3)** 01 **ACC ETABLISSEMENT**
IDENTIF. DU CANAL (18) 01 89
type interface : interface de base
préfer./exclus.: exclusif
sélect. canal : Canal B1 **(Q8)**
u: 13/01/09 17:21:27:83 00 103**(Q3)** 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 30
numéro : 0 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:29:16 00 103**(Q3)** 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 31
numéro : 1 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:30:52 00 103**(Q3)** etc 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 36
numéro : 6 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:30:96 00 103 **(Q4)** 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 39
numéro : 9 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:31:42 00 103 **(Q4)** 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 30
numéro : 0 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:31:89 00 103 **(Q4)** etc 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 34
numéro : 4 **(Q9)**

u: 13/01/09 17:21:32:26 00 103 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 35
numéro : 5 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:32:64 00 103 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 37
numéro : 7 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:32:95 00 103 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 37
numéro : 7 **(Q9)**
u: 13/01/09 17:21:33:32 00 103 01 **INFORMATION**
NUMERO DESTINATION (70) 02 81 31
numéro : 1 **(Q9)**
r: 13/01/09 17:21:33:55 00 103 01 **APPEL EN COURS**
IDENTIF. DU CANAL (18) 01 89
préfer./exclus.: exclusif
sélect. canal : Canal B1
r: 13/01/09 17:21:34:31 00 103 01 **ALERTE**
r: 13/01/09 17:21:38:17 00 103 01 **CONNEXION (Q10) durée de l'appel facturé**
u: 13/01/09 17:21:38:19 00 103 01 **ACC CONNEXION**
r: 13/01/09 17:22:04:07 00 103 01 **DECONNEXION (Q10)**
r: 13/01/09 17:22:04:68 00 103 01 **LIBERATION**
u: 13/01/09 17:22:04:72 00 103 01 **FIN LIBERATION**

Bonne chance ☺

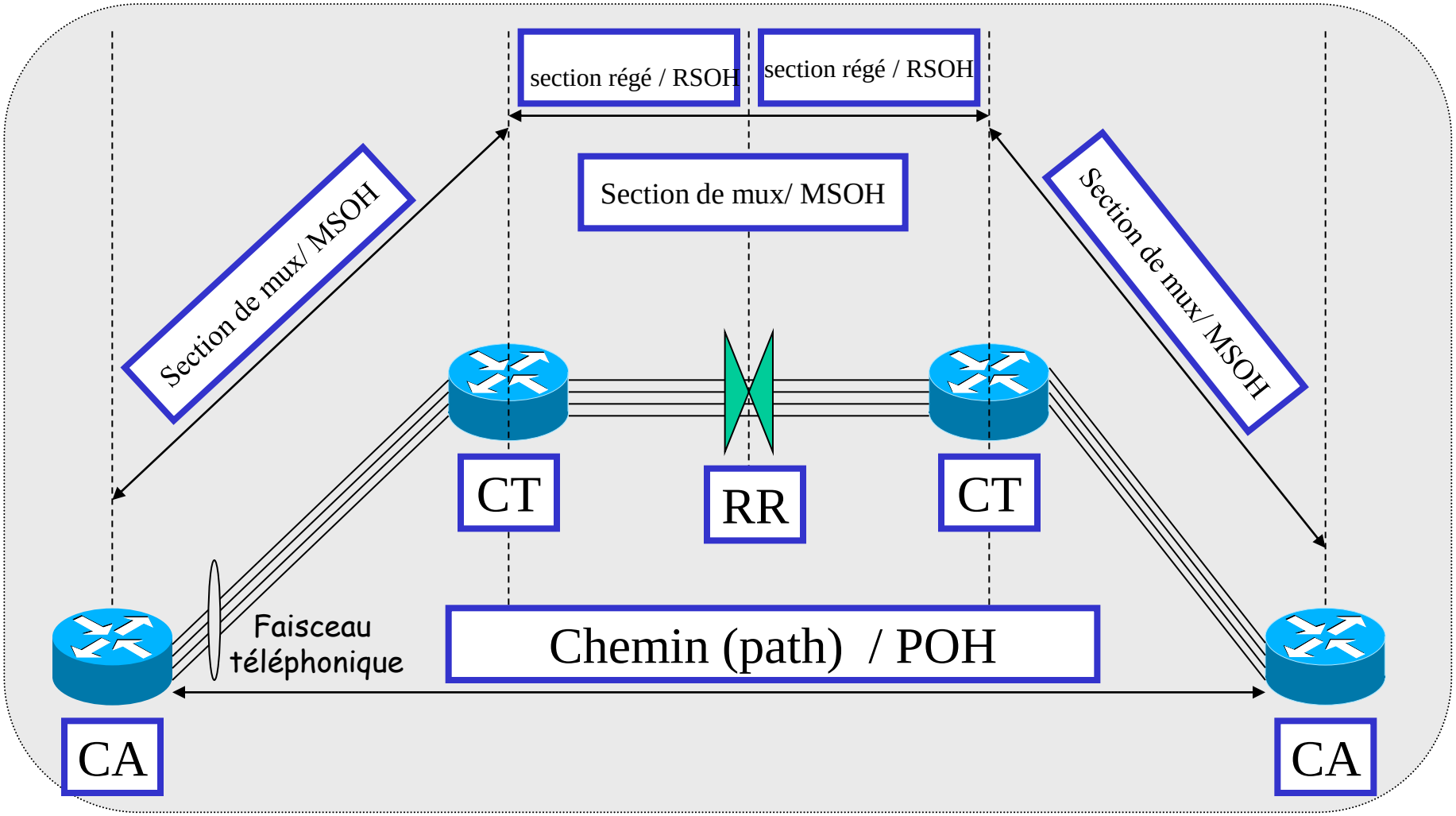
Figure 1



Liste : *PC classique non RNIS, PC avec carte RNIS, modem analogique 56K, TNR, TNR-G, TL, TC, PABX, prise RJ45, interfaces R, S, T, U, V, téléphone analogique, téléphone RNIS, terminal de visioconférence, adaptateur de terminal, fax analogique, fax numérique.*

Figure 2

Transmission dans le cœur de réseau



Liste : *Chemin, Répéteur-Régénérateur RR, Commutateur d'Accès CA, Commutateur de Transit CT, section de régénération, section de multiplexage, POH, RSOH, MSOH*

Telecom SudParis	Module : **NET3502 – Réseaux de données**	
Domaine: **1ère Année.**	Responsable : Olivier Paul	
Durée: **1H30**	Documents : **Poly Autorisé**	Nombre de pages :**5**
NOM :	**Prénom :**	**Note:**

- L'épreuve comporte trois exercices.
-

Exercice I : **Reprise sur perte** (8 points)

I.1 Expliquez ce qu'est le service de reprise sur perte.

Par la suite on considère une communication entre deux entités A et B de niveau liaison de donnée. Pour simplifier le problème on supposera que les erreurs ne peuvent se produire que dans le sens A vers B. (Cette supposition est assez réaliste car les unités de données allant de B vers A ont une taille négligeable par rapport aux unités de données circulant dans l'autre sens).

I.2 En supposant la répartition des erreurs binaires uniformes sur les unités de donnée échangées, donnez la probabilité *p* pour le récepteur B de recevoir de A une trame erronée pour une taille d'unité de donnée *t* octets et une probabilité d'erreur binaire (ber) *b*. Pour calculer *p* on se servira du fait qu'une trame non erronée est une trame dont tous les bits sont non erronés et que la probabilité *p* est *1 – p'* où *p'* est la probabilité de recevoir une trame non erronée.

On suppose maintenant l'utilisation entre A et B d'un protocole de détection et reprise sur perte de type *stop and wait* tel que présenté transparent 69 dans le support de cours. On suppose qu'en cas de perte, l'émetteur abandonne la réémission d'une trame qu'il estime perdue au bout de l'émission *r*.

I.3 A partir de la probabilité *p*, donnez le coût moyen *c* en nombre de bits de l'émission d'une trame de l'émetteur vers le récepteur pour une taille de trame moyenne de *t* octets et un ber *b*. Dans cette formule on ignorera le coût de transmission des acquittements de B vers A.

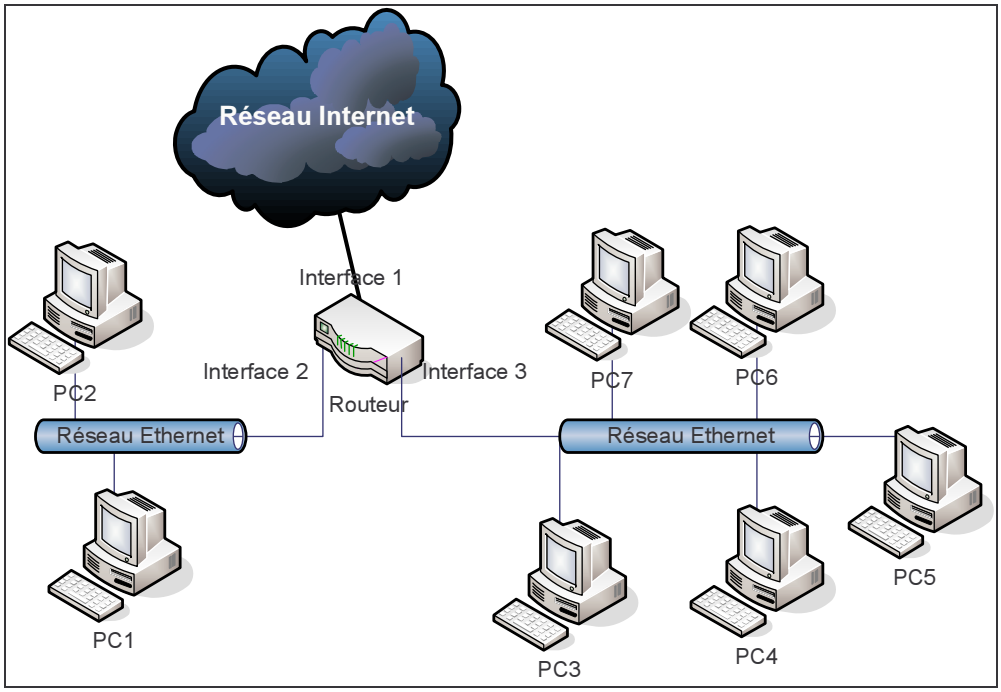
I.4 Application numérique.

t (taille octets)	*b(bit error ratio)*	*r (retransmissions avant abandon)*	*c (coût)*
500	10-3	5	
500	10-6	5	
500	10-9	5	
500	10-3	20	
500	10-6	20	
500	10-9	20	

I.5 Qu'en concluez-vous sur les cas où un dispositif de reprise sur perte est intéressant ? Expliquez votre réponse.

Exercice II : **Adressage et routage IP** (6 points)

On considère une entreprise ayant deux services de production sur un même site. Le premier service comprend 5 machines, le second 2. Ces deux services sont séparés de 50 mètres. Afin d'interconnecter ces équipements l'entreprise utilise deux réseaux Ethernet CSMA-CD et un routeur 3 ports/interfaces. La topologie du réseau implémenté est présentée dans la figure ci-dessous. Chaque PC est connecté à un réseau Ethernet au moyen d'une interface. Le routeur est connecté à chaque réseau Ethernet au moyen des interfaces 2 et 3 et au réseau Internet au travers de l'interface 1.



L'entreprise reçoit le préfixe 122.53.128.28/26 de l'organisme gérant l'adressage. L'adresse du routeur du coté de réseau internet est 122.53.30.12.

I.1 Donnez pour chaque équipement, une (plusieurs) adresses et masques de telle sorte à ce qu'ils puissent communiquer entre eux.

Equipement	**Interface**	**Adresse**	**Masque**
PC1			
PC2			
PC3			
PC4			
PC5			
PC6			
PC7			
Routeur			
Routeur			

I.2. Donnez la table de routage de l'équipement PC5

Adresse Réseau	Interface de sortie

I.3. Donnez la table de routage du routeur.

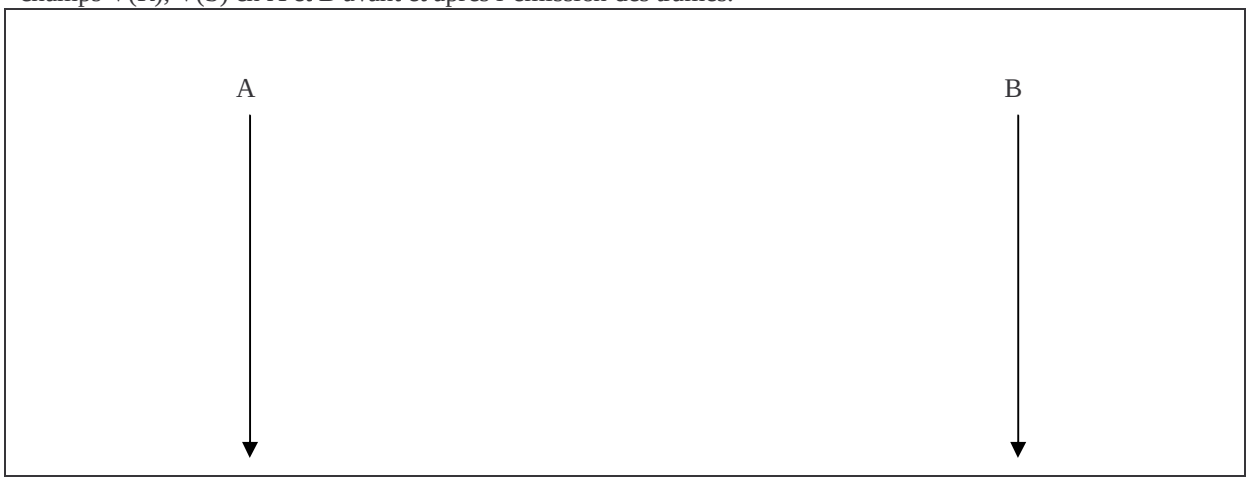
Adresse Réseau	Interface de sortie

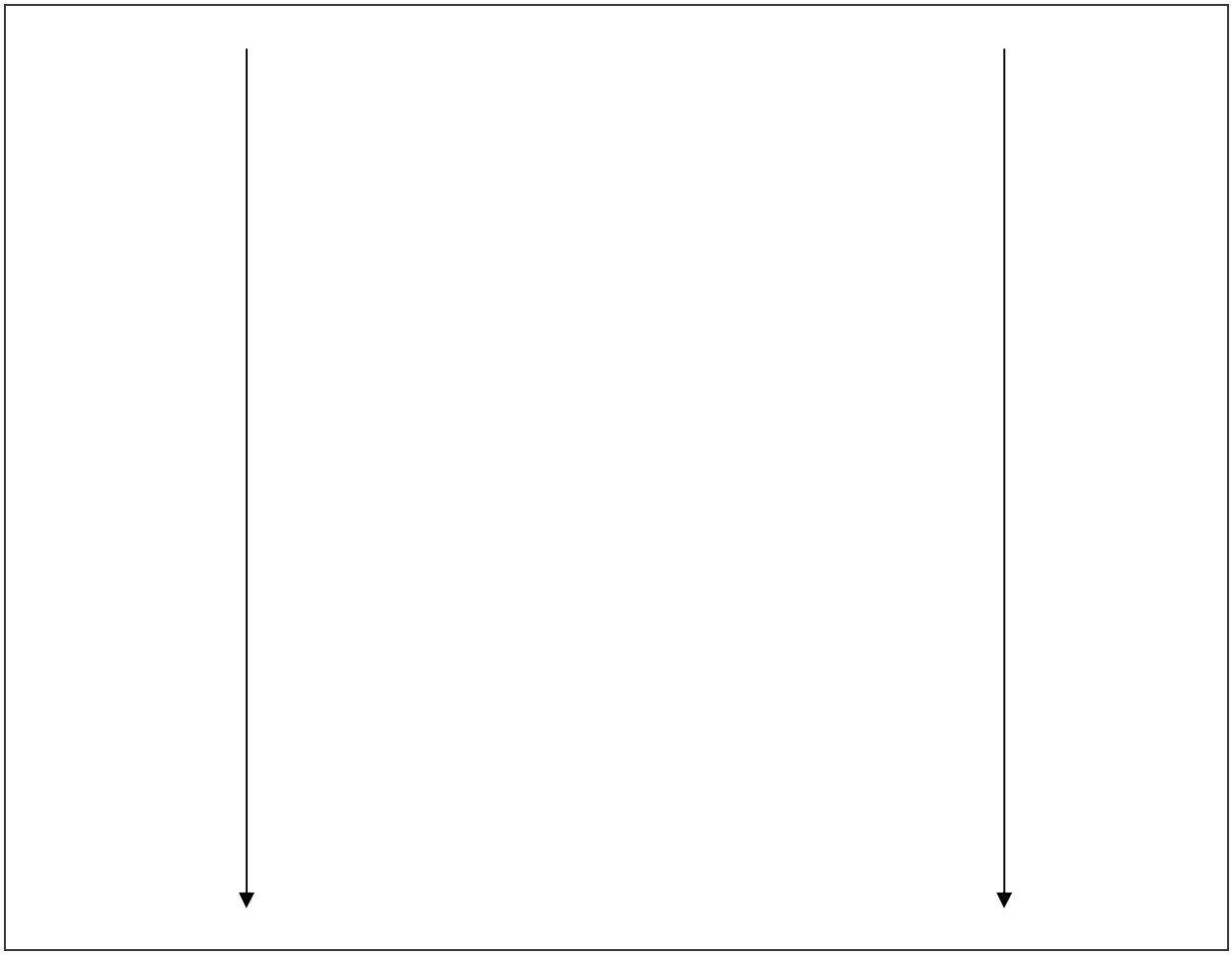
Exercice III : **Protocole HDLC** (6 points)

On souhaite analyser un échange de trames HDLC entre deux entités A et B. Pour cette analyse on se reportera au format des trames HDLC donné en cours. Les trames présentées contiennent tous les champs tels que fournis par la couche physique. Le suffixe "0x" indique un code hexadécimal.

Trame numéro	Sens	Champ de contrôle
1	A->B	0x23
2	A->B	0x33
3	B->A	0x91
4	A->B	0x1b
5	B->A	0x8a
6	A->B	0x23
7	B->A	0x33
8	A->B	0x33
9	B->A	0xa4

III.1 Dessinez sur le diagramme temporel suivant les échanges présentés en associant à chaque trame son type, son sous type, et les valeurs N(S), N(R) et P/F quand c'est nécessaire. Indiquez également les valeurs des champs V(R), V(S) en A et B avant et après l'émission des trames.



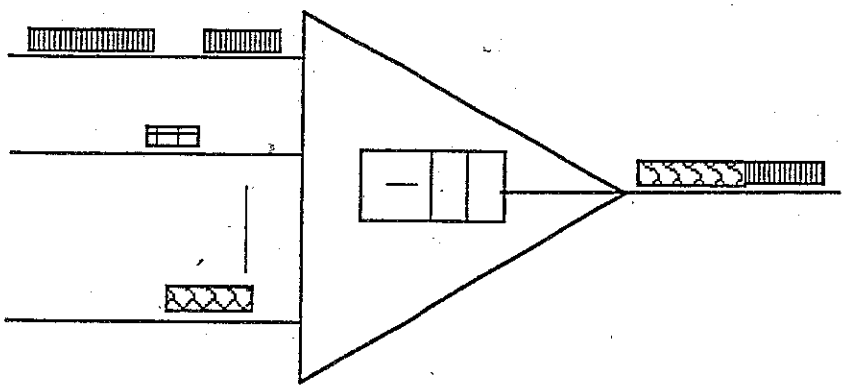


III.2 A quoi sert la trame numéro 9 ?

Contrôle de Files d'attente 2 juin 2009 deuxième session
Monique Becker
(polycopié non annoté autorisé, aucun autre document n'est autorisé)
(calculettes interdites)

Exercice : Multiplexage statistique (noté sur 5)

Lorsque sur les liaisons entrantes d'un multiplexeur, l'arrivée d'information se fait de façon irrégulière, la technique recommandée est d'effectuer un multiplexage statistique des informations. Les informations entrantes sont par exemple stockées dans une mémoire commune et émises sur la liaison sortante à haut débit dans leur ordre d'arrivée. Ces informations peuvent être de taille variable, on ajoute alors un en-tête indiquant la liaison entrante à laquelle appartient l'information et la taille des informations.



Le comportement du multiplexeur peut donc être modélisé par une file d'attente possédant un serveur, à discipline de service premier arrivé premier servi. On ne peut stocker simultanément qu'un nombre fini de paquets M. La capacité de la file est donc M (en nombre de paquets).

On considère que les arrivées sur chacune des entrées i sont poissonniennes de taux λ_i (en nombre de paquets par seconde). Les paquets sont de taille variable. On suppose que ces paquets sont assez grands pour pouvoir négliger la taille des informations ajoutées par le multiplexeur et que la taille des paquets est exponentiellement distribuée de paramètre μ.
Le débit de la liaison sortante est C.

1/ Quel est le temps moyen d'émission d'un paquet sur la liaison sortante ?
2/ Quel est le débit global d'entrée du multiplexeur en nombre de paquets par seconde puis en bit/s ?
3/ Donner la notation de Kendall de cette file d'attente.
4/ Pourquoi les probabilités de rejet des paquets sont-elles les mêmes pour les différentes liaisons entrantes ? Déterminer cette probabilité de rejet.
5/ Déterminer la taille nécessaire de la file (en nombre de paquets) pour que la probabilité de rejet soit inférieure à un certain taux τ.

(On ne demande pas la valeur numérique mais on demande une formule qui permettrait de calculer directement la valeur numérique)

Application numérique :
λ_1= 2000 paquets/s, λ_2=2000 paquets/s, λ_3 = 4000 paquets/s, $\mu = 10^{-3}$, C=10 Mbit/s, $\tau = 10^{-5}$.

Problème : Ce problème pourrait être vu comme un ensemble de 6 exercices indépendants, (2 pour chaque partie) ayant une base commune et des notations communes. N'hésitez pas, si vous ne savez pas résoudre une question à aller plus loin. Certains des exercices sont très proches d'exercices faits en TD. Je noterai chacune des parties sur au moins 6

Lorsque l'on essaye d'évaluer les performances des réseaux informatiques ou de télécommunications fonctionnant en mode paquet, il est nécessaire de prendre en compte dans les modèles, les temps d'émission des paquets sur les différents liens physiques et les temps de propagation entre les différents nœuds de commutation du réseau. Les premiers sont modélisés par des files d'attente à 1 serveur (on émet les paquets les uns après les autres) et les seconds par des délais - nombre infini de serveurs sans attente. En effet, quand le premier bit d'un paquet commence à se propager, le dernier bit du paquet précédent est déjà sorti du commutateur.
L'objectif de ce problème est de voir comment des délais peuvent être analysés dans des réseaux ouverts et fermés de files d'attente ainsi que l'influence de la loi du service de ces délais sur les performances de l'ensemble.

1. Partie n°1 : Etude des "délais" seuls

Les questions 1 et 2 sont en grande partie indépendantes

1.1 File M/M/∞ - Délai Exponentiel

On considère une file d'attente à arrivées poissonniennes de taux λ, à services exponentiellement distribués de paramètre μ et possédant un nombre infini de serveurs. On note $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ la charge de la file. Les clients n'attendent jamais et sont immédiatement servis.

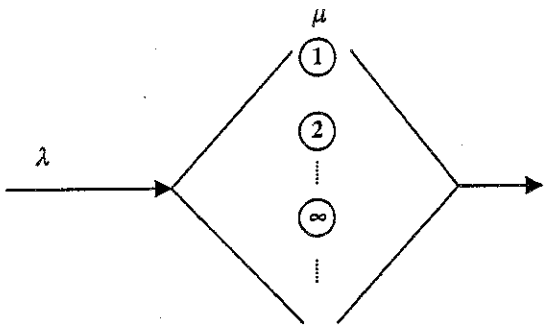


Figure n°1 : file M/M/∞

1.1.1 Soit $N(t)$ le nombre de clients dans la file à l'instant t. Montrer que le processus $\{N(t), t \in IR\}$ est un processus markovien de type naissance et mort. Représenter le graphe associé à ce processus.

1.1.2 Déterminer les probabilités π_k qu'il y ait k clients dans la file en régime stationnaire. Y-a-t-il des conditions sur λ et μ pour que le système soit stable ?

1.1.3 En déduire le nombre moyen de clients dans la file puis le temps moyen de réponse de la file. Ce résultat n'aurait-il pas pu être trouver plus rapidement ?

1.2 File M/D/∞

La modélisation du temps de transfert d'une file à une autre par un délai exponentiellement distribué n'est pas toujours justifiée et l'on préfère souvent modéliser ces délais par un temps de transfert D constant $\left(\frac{1}{\mu} = D\right)$ en particulier dans le cas où les délais représentent des temps de propagation.

1.2.1 On note de nouveau $N(t)$ le nombre de clients dans la file à l'instant t. Le processus $\{N(t), t \in IR\}$ est-il un processus markovien ? Justifier votre réponse.

1.2.2 On suppose, par exemple, que la file est vide à l'instant t=0. Cela se traduit par le fait que : $\pi_0^0 = \Pr[N(0)=0]=1$ et $\pi_k^0 = \Pr[N(0)=k]=0, k>0$.

Pourquoi selon vous aura-t-on les propriétés :

$$(2.1)\ \forall t \geq D, \forall k, \pi_k^t = \Pr[N(t)=k] = \frac{(\lambda D)^k}{k!} e^{-\lambda D}$$

$$(2.2)\ \forall t \leq D, \forall k, \pi_k^t = \Pr[N(t)=k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

En constatant que dans la propriété (2.1), les quantités ne dépendent pas de t, en déduire les probabilités en régime stationnaire.

A-t-on besoin que la file soit vide à l'état initial pour que (2.1) soit vérifiée ?

1.2.3 En déduire le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen de réponse. Conclure

2. Partie n°2 : Etude d'un réseau ouvert

Les questions 2.1 et 2.2 sont de nouveau en grande partie indépendantes

2.1 On considère maintenant le système représenté dans la figure 2. La file 1 est un *délai exponentiel* de taux de service μ_1. La file 2 a un serveur, le temps de service est exponentiellement distribué de taux μ_2, sa discipline de service FCFS (FIFO) et sa capacité est supposée infinie.

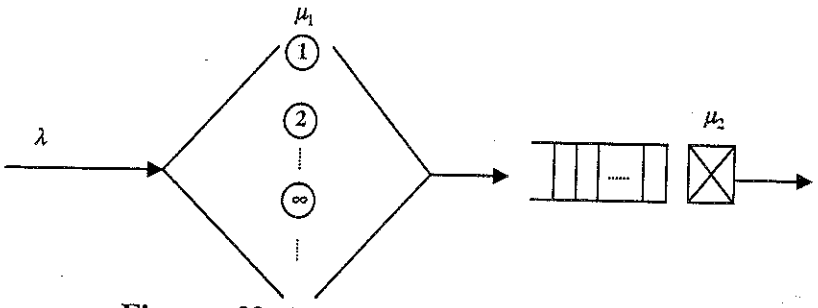


Figure n°2 : Réseau de files d'attente ouvert

2.1.1 Montrer que le couple formé par les nombres de clients dans les 2 files $\{(N_1(t), N_2(t)), t \in IR\}$ constitue un processus markovien. Représenter le graphe associé à ce processus.

On se propose de montrer que la probabilité limite en régime stationnaire π_n d'un état $n=(n_1,n_2)$ est de la forme (C est une constante) :

$$\pi_n = C \frac{1}{n_1!} \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^{n_2}$$

2.1.2 Pour cela, montrer que les équations d'équilibre de flux autour de chacun des états (méthode des coupes où l'on isole successivement chacun des états) sont de la forme (on expliquera les événements correspondant aux différents termes) :

$$\pi_n\left(\lambda + n_1\mu_1 1_{\{n_1>0\}} + \mu_2 1_{\{n_2>0\}}\right) = \mu_2 \pi_{n_2^+} + (n_1+1)\mu_1 1_{\{n_2>0\}} \pi_{n_{12}^{+-}} + \lambda 1_{\{n_1>0\}} \pi_{n_1^-}$$

où $n_1^- = (n_1-1, n_2)$, $n_2^+ = (n_1, n_2+1)$, $n_{12}^{+-} = (n_1+1, n_2-1)$ et $1_X = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ est vérifiée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.1.3 On veut montrer que la distribution proposée satisfait ces équations d'équilibre.

Pour cela montrer que la distribution proposée vérifie toutes les équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda\pi_n = \mu_2\pi_{n_2^+} \\ n_1\mu_1 1_{\{n_1>0\}}\pi_n = \lambda 1_{\{n_1>0\}}\pi_{n_1^-} \\ \mu_2 1_{\{n_2>0\}}\pi_n = (n_1+1)\mu_1 1_{\{n_2>0\}}\pi_{n_{12}^{+-}} \end{cases}$$

Conclure.

2.1.4 Montrer finalement que $C = e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right)$. Quelle est la condition de stabilité du système ? Conclure.

2.1.5 Déterminer les probabilités marginales $\pi^i_{n_i}$ d'avoir n_i clients dans la file i en régime stationnaire (il suffit de sommer les probabilités de toutes les états où l'on a n_i clients dans la file i). En déduire les nombres moyens de clients dans chacune des 2 files.
Montrer que le temps moyen de réponse de l'ensemble vaut finalement :

$$E[R] = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

2.2 On considère de nouveau le schéma de la figure 2, mais dans cette partie, le délai D est constant et égal à $\left(\frac{1}{\mu_1} = D\right)$.

2.3 On s'intéresse au processus d'arrivée dans la seconde file.
Pour montrer que ce processus est poissonnien, montrer que le nombre de clients qui entrent dans la file 2 pendant une période T suit une loi de Poisson.
Qu'en déduit-on sur le comportement de la deuxième file. Quel est son temps moyen de réponse (aucun calcul n'est nécessaire) ?

2.4 Déterminer le temps moyen de réponse de l'ensemble du réseau. Conclure.

3. Partie n°3 : Réseau fermé

Dans cette dernière partie les deux questions ne sont pas complètement indépendantes.

3.1 On se replace dans le cas du délai exponentiel et l'on considère le réseau fermé suivant :

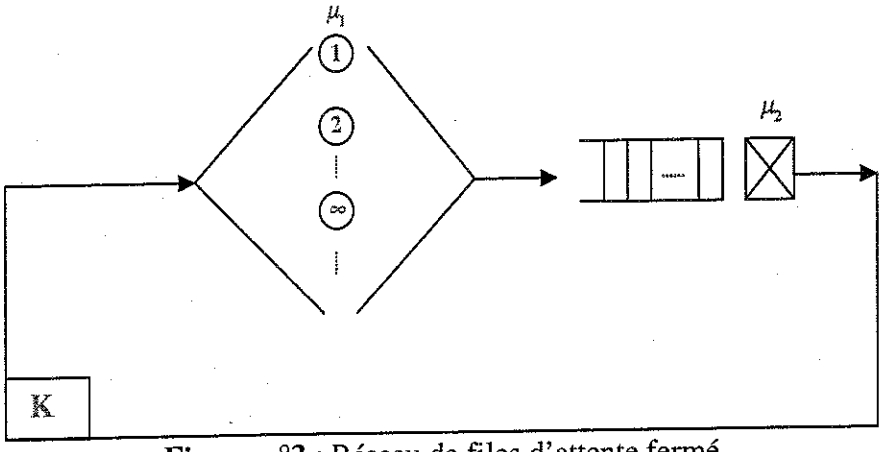


Figure n°3 : Réseau de files d'attente fermé

Le nombre de clients est égal à K. La file 2 est à temps de service exponentiel, discipline de service FCFS et une capacité au moins égale à K.

3.1.1 Montrer que le nombre de clients dans la deuxième file constitue un processus markovien de type naissance et mort. Représenter le graphe associé.

3.1.2 Déterminer les probabilités π_k qu'il y ait k clients dans la file 2 en régime stationnaire.

3.1.3 En déduire le taux d'occupation du serveur 2 puis le débit de sortie de la file 2 (c'est le débit du rebouclage).

3.1.4 En appliquant la loi de Little, déterminer le temps moyen de réponse global du système entre deux passages dans le rebouclage en fonction de K, μ_1 et μ_2.

3.1.5 Une autre méthode pour étudier ce système peut consister à l'étudier comme un réseau de files d'attente. Pour cela, montrer que le couple formé par les nombres des clients dans chacune des deux files constitue un processus markovien.

3.1.6 On va s'inspirer de la méthode présentée dans le cas du réseau ouvert avec un délai exponentiel. Montrer que les équations d'équilibre de flux autour de chacun des états (issues de la méthode des coupes) sont de la forme :

$$\pi_n\left(n_1\mu_1 1_{\{n_1>0\}} + \mu_2 1_{\{n_2>0\}}\right) = \mu_2\pi_{n_{12}^{-+}} 1_{\{n_1>0\}} + \left(n_1+1\right)\mu_1 1_{\{n_2>0\}}\pi_{n_{12}^{+-}}$$

où $n_{12}^{+-} = \left(n_1+1, n_2-1\right)$ et $n_{12}^{-+} = \left(n_1-1, n_2+1\right)$

3.1.7 On se propose alors de montrer que π_n est de la forme :

$$\pi_n = C\frac{1}{n_1!}\left(\frac{1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{\mu_2}\right)^{n_2}$$

Pour cela utiliser la méthode proposée dans la partie n°2 (question 2.1.3).

3.1.8 Déterminer C et montrer que l'on obtient bien les mêmes résultats de la question 3.1.2.

3.2 Dans cette dernière partie, on reprend le cas du délai constant.

3.2.1 Quel algorithme peut-on utiliser ?

3.2.2 Déterminer le nombre moyen de clients dans la première file $L_1(K)$ quand on a K clients dans le réseau en fonction du débit dans le rebouclage $\Lambda(K)$ et de μ_1. En déduire le nombre moyen de clients dans la deuxième file $L_2(K)$.

3.2.3 Déterminer les temps moyens de réponse de chacune des 2 files $R_1(K+1)$ et $R_2(K+1)$ quand on a $(K+1)$ clients dans le réseau. En déduire le temps moyen de réponse entre 2 passages dans le rebouclage $R(K+1)$ puis le débit dans le rebouclage $\Lambda(K+1)$ en fonction de μ_1, μ_2, K et $\Lambda(K)$.

3.2.4 Démontrer, par exemple par récurrence, que $\Lambda(K)$ est bien de la forme trouvée dans la question 3.1.4.

3.2.5 En déduire la forme de $R(K)$. Conclure.

Correction CF2 Files d'attente 2009

Ex 1 1/ ℓ = longueur d'un paquet $E[\ell] = \frac{1}{\mu}$ A.N. $E[\ell] = 10^3$ bits

S = temps d'émission d'un paquet $\boxed{E[S] = \frac{E[\ell]}{C} = \frac{1}{\mu C}}$

A.N. $\boxed{E[S] = 10^{-4}\ s}$

2/ Λ = débit global $= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ A.N. $\boxed{\Lambda = 8000 \text{ paquets/s} = 8 \times 10^6 \text{ bits/s}}$

Le flux obtenu par superposition de 3 flux Poissonniens est Poissonnien

3/ Il s'agit d'une M/G/1 multiclasse à capacité limitée M. Le temps de service a la même loi pour toutes les classes et est exponentiellement reparti. On peut considérer le multiplexeur comme une $\boxed{M/M/1/M}$

4/ La priorité étant FIFO la probalité de rejet est la même pour toutes les classes. Pasta s'applique aux arrivées Poissonniennes

$$\boxed{P_{rejet} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\rho^M} \quad \text{si } \rho \neq 1 .$$

Ici $\rho = \Lambda E[S] = [\text{débit en paquets/s}] \times E[\text{temps d'émission d'un paquet}]$

$= 8000 \times 10^{-4} = 0.8$

5/ $\frac{(1-\rho)\rho^M}{1-\rho^{M+1}} < \tau$ Posons $x = \rho^M$; $(\rho = 0.8)$

$$\frac{0.2\,x}{1-0.8\,x} < \tau$$

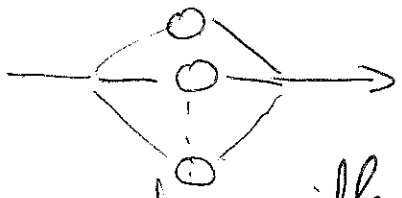
$$x < \frac{\tau}{0.2 + 0.8\tau}$$

$$\boxed{M > \frac{\ln \tau - \ln(0.2 + 0.8\tau)}{\ln 0.8}}$$

A.N. $M > 44,3819$

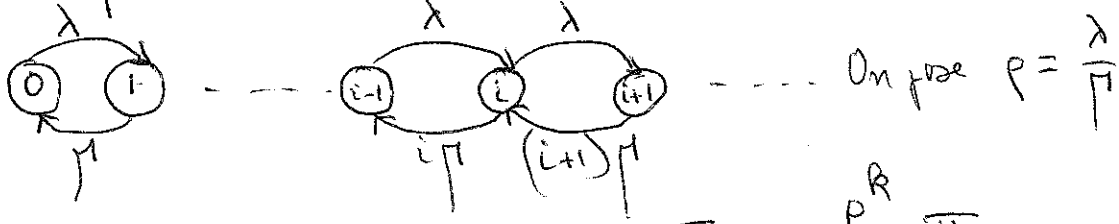
$M \geq 45$

Problème : Partie 1 : $1/\Pi/\Pi/\infty$



N(t) est Markovien car les seuls evenements possibles sont
- une arrivée (Poisson)
- un depart (inf de temps de services residuels exponentiels)

N(t) ne peut evoluer que de +1 ou de -1. Donc N(t) est un processus de naissance et de mort.



On pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Theorème des coups $\longrightarrow$ $\Pi_k = \frac{\rho^k}{k!}\Pi_0$

On trouve Π_0 t. q. $\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k = 1$ $\quad \Pi_0 = e^{-\rho}$

Donc cette file est **stationnaire $\forall \rho$** (pas de conditions de stabilité)

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k\Pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\Pi_k = \rho \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^{k-1}}{k!} e^{-\rho} = \rho \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho} = \rho$$

Little $\longrightarrow$ $R = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$ Ceci aurait pu être trouvé directement car il n'y a pas d'attente $R = S = \frac{1}{\mu}$

2/ $\Pi/D/\infty$. Si le service est constant N(t) n'est pas Markovien car si on connait le nombre de clients à l'instant t on ne peut pas prévoir la loi du temps au bout duquel les services se termineront. Il faudrait savoir depuis combien de temps ils ont commencé.

— Si $t \leq D$ et si $N(0) = 0$ aucun de ceux qui sont arrivés ne sont partis $N(t)$ est donc le nombre de ceux qui sont arrivés entre 0 et t, le processus d'arrivée étant un processus de Poisson. D'exercice corrigé on a trouvé

$$P_r\left[N(t) = k\right] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (2.2)$$

— Si $t \geq D$ ceux qui ne sont pas encore partis sont ceux qui sont arrivés entre $t-D$ et t. Pour un processus de Poisson de taux λ la probabilité pour que le nombre d'arrivés dans un intervalle de longueur D soit est.

$$(2.1) \qquad \frac{(\lambda D)^k}{k!} e^{-\lambda D}$$

Donc $t \geq D$ $\qquad P_r\left[N(t) = k\right] = \frac{(\lambda D)^k}{k!} e^{-\lambda D}$

Cette formule montre un resultat independant de t.

il y a donc stationnarité $\qquad \boxed{\Pi_k = \frac{(\lambda D)^k}{k!} e^{-\lambda D}}$

— Le raisonnement est independant de $N(0) = 0$.

Pour $t \geq D$ tous les clients qui étaient presents à l'instant 0 sont partis.

Posons $\rho = \lambda D$ $\qquad L = \sum k \Pi_k = \rho$

$$R = \frac{L}{\lambda} = D$$

Conclusion $\boxed{M/M/\infty \text{ ou } M/D/\infty \longrightarrow R = S}$

$\boxed{L = \lambda S}$

Partie 2 Tandem reseau ouvert delai et 1 serveur exponentiel



On a un reseau BCMP (et non pas Jackson à cause du délai). On va redémontrer les resultats.

2.1/ Delai exponentiel

Le couple $(N_1(t), N_2(t))$ est Markovien en effet analysons les evenements possibles lorsqu'on sait que le couple est (n_1, n_2)

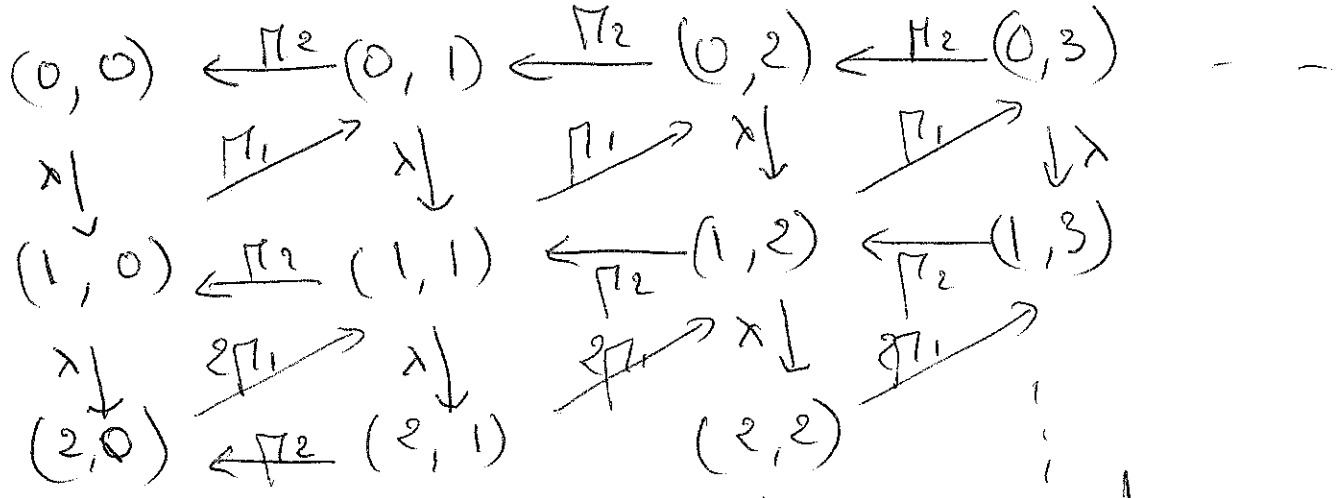
Si $n_1 > 0$ et $n_2 > 0$ les evenements possibles sont

a/ arrivée $n_1 \longrightarrow n_1 + 1$ (Poisson, sans memoire, taux λ)

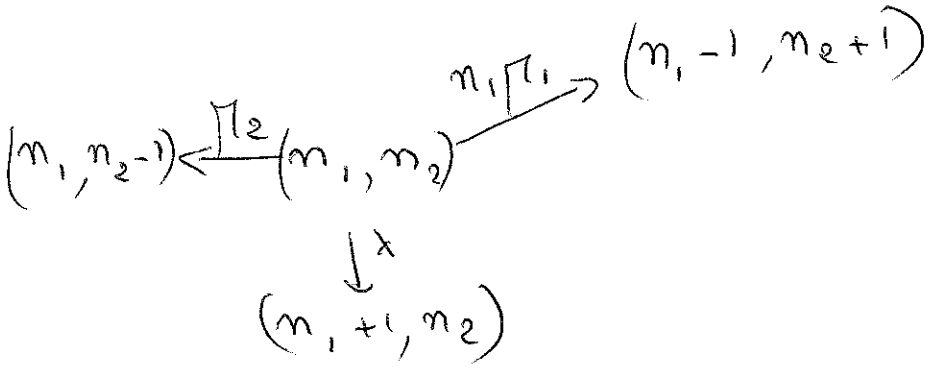
b/ fin de service delai $n_1 \longrightarrow n_1 - 1$ service exponentiel
$n_2 \longrightarrow n_2 + 1$

la fin de l'un des n_1 service se produit avec le taux $n_1 \Gamma_1$

c/ fin de service file 2 : $n_2 \longrightarrow n_2 - 1$ service exponentiel taux Γ_2



En croupant autour de (n_1, n_2) et en ecrivant que le flux entrant dans cet etat = flux sortant on obtient l'equation demandée (2, 1.2)



2.1.3 Il serait fausse de couper entre 2 etats (n_1, n_2) et (n_1, n_2+1) par exemple, car pour couper il faut separer l'ensemble des etats en 2 sous ensembles. La démarche ici est differente. On devine la solution et on montre qu'elle verifie 3 equations et qu'en faisant la somme des 3 equations on obtient 2.1.2. On en déduit donc que la solution devinée convient si et seulement si on reussit à trouver une constante C telle que la somme de toutes les probas d'etats = 1.

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} C\ \frac{1}{n_1!}\left(\frac{\lambda}{\Gamma_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda}{\Gamma_2}\right)^{n_2} = C\, e^{-\frac{\lambda}{\Gamma_1}} \sum_{n_2=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\Gamma_2}\right)^{n_2}$$

CNS cette serie converge $\Longleftrightarrow \frac{\lambda}{\Gamma_2} < 1$

Condition de stabilité $\boxed{\lambda < \Gamma_2}$ et $C = e^{-\frac{\lambda}{\Gamma_1}\left(1-\frac{\lambda}{\Gamma_2}\right)}$

Finalement le délai ne pose pas de problème de stabilité comme on l'avait vu en 1. La proba d'etat est un produit de 2 termes celui qu'on a trouvé dans la partie 1 pour le délai et celui qu'on connait pour la file $\Gamma/\Gamma/1$

2.1.5 $\Pi'_{n_1} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \Pi(n_1, n_2) = e^{-\frac{\lambda}{\Pi_1}} \left(\frac{\lambda}{\Pi_1}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1!} \left[\sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\Pi_2}\right)^{n_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\Pi_2}\right)\right]$

$= e^{-\frac{\lambda}{\Pi_1}} \left(\frac{\lambda}{\Pi_1}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1!}$

$L_1 = \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1 \left(\frac{\lambda}{\Pi_1}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1!} e^{-\frac{\lambda}{\Pi_1}} = \frac{\lambda}{\Pi_1}$ $\qquad R_1 = \frac{1}{\Pi_1}$

De même $\Pi^2_{n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \Pi(n_1, n_2) = \left(1 - \frac{\lambda}{\Pi_2}\right)\left(\frac{\lambda}{\Pi_2}\right)^{n_2}$

$L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$ $\qquad R_2 = \frac{1}{\Pi_2 - \lambda}$

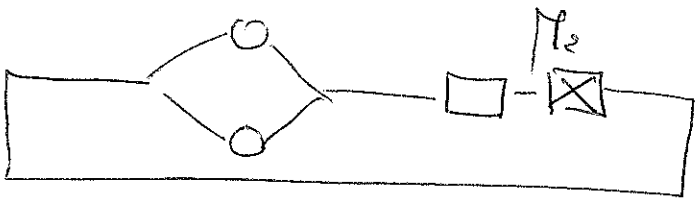
$R = \frac{1}{\Pi_1} + \frac{1}{\Pi_2 - \lambda}$

2.2.1 Si la file delai est à service constant, elle correspond juste à une translation dans le temps. Le nombre de clients qui entrent dans la file 2 pendant une période T est celui de ceux qui sont entrés dans la file 1 pendant une période T (translatée de $-D$). C'est donc un processus de Poisson et la deuxième file est donc une file $\Pi/\Pi/1$

On retrouve $R_2 = \frac{1}{\Pi_2 - \lambda}$

$R = \frac{1}{\Pi_1} + \frac{1}{\Pi_2 - \lambda}$

Partie 3 : Reseau fermé



3.1. delais exponentiels

3.1.1. la file 2 est un reparateur $\Gamma/\Gamma/1/K/K$.
Lorsqu'il y a k clients dans la file 2 il y en a K-k dans la file delai et la taux d'arrivée est $(K-k)\Pi_1$



Le theoreme des coups → $\Pi_k = \Pi_0 \frac{K!}{(K-k)!}\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right)^k$

Pas de problème de stationnarité car la chaine est finie

On peut ecrire $\Pi_k = \Pi_0 \frac{K!}{(K-k)!}\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right)^K \left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right)^{K-k}$

et en posant $\rho = \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ $\Pi_k = \Pi_0 \frac{K!}{\rho^K} \frac{\rho^{K-k}}{(K-k)!}$

$$\Pi(0) = \frac{\frac{\rho^K}{K!}}{\sum_{k=0}^{K} \frac{\rho^{K-k}}{(K-k)!}} = \frac{\frac{\rho^K}{K!}}{\sum_{i=0}^{K} \frac{\rho^i}{i!}}$$

$$U_2 = 1 - \Pi(0) = \frac{\sum_{j=0}^{K-1} \frac{\rho^j}{j!}}{\sum_{i=0}^{K} \frac{\rho^i}{i!}}$$

3.2.? $\Lambda(K) = U_2 \Pi_2 = \Pi_2 \dfrac{\sum_{j=0}^{K-1} \frac{\rho^j}{j!}}{\sum_{j=0}^{K} \frac{\rho^j}{j!}}$ avec $\rho = \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$

$$K = (R_1 + R_2)\,\Lambda(K) = \left(\frac{1}{\Gamma_1} + R_2\right)\Lambda(K)$$

$$R_2 = -\frac{K}{\Lambda(K)} + \frac{1}{\Gamma_1}$$

$$R_{global} = \frac{K}{\Lambda(K)} = \frac{K}{\Gamma_2} \qquad \frac{\sum_{j=0}^{K} \frac{\gamma^j}{j!}}{\sum_{j=0}^{K-1} \frac{\gamma^j}{j!}}$$

3.1.6) On applique la même methode qu'au 2.1. mais cette fois la chaîne est finie et $(n_1 + n_2) = K$ pour tous les états possibles. Si n_1 et n_2 sont positifs strictes

$$(n_1+1, n_2-1) \underset{\Gamma_2}{\overset{(n_1+1)\Gamma_1}{\rightleftarrows}} (n_1, n_2) \underset{\Gamma_2}{\overset{n_1\Gamma_1}{\rightleftarrows}} (n_1-1, n_2+1)$$

On obtient les equations d'equilibre de 3.1.6

On verifie que $\Pi_n = C \frac{1}{n_1!}\left(\frac{1}{\Gamma_1}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{\Gamma_2}\right)^{n_2}$ est solution de 3.1.6 avec $C \frac{1}{\Gamma_1^K} \sum_{n_2=0}^{K} \frac{1}{(K-n_2)!}\rho^{n_2} = 1$

$\frac{C}{\Gamma_1^K} = \Pi_0\, K!$ et on retrouve le resultat précedent on a le même Π_0.

3.2.2
Dans le cas de délai constant on peut utiliser l'algorithme de Reiser (applicable au théorème BCMP)

Lelle $L_1(K) = R_1 \Lambda(K) = \frac{1}{\Gamma_1} \Lambda(K)$

$L_1(K) + L_2(K) = K \longrightarrow L_2(K) = K - \frac{\Lambda(K)}{\Gamma_1}$

$= K - \vartheta \dfrac{\sum_{i=0}^{K-1} \frac{\vartheta^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{K} \frac{\vartheta^i}{i!}}$

$R_1(K+1) = \frac{1}{\Gamma_1}$ est inchangé

$R_2(K+1) = \frac{1}{\Gamma_2}(1 + L_2(K)) = \frac{1}{\Gamma_2}\left(K+1 - \dfrac{\vartheta \sum_{i=0}^{K-1} \frac{\vartheta^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{K} \frac{\vartheta^i}{i!}}\right)$

$R(K+1) = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}\left(K+1 - \dfrac{\vartheta \sum_{i=0}^{K-1} \frac{\vartheta^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{K} \frac{\vartheta^i}{i!}}\right)$

$\Lambda(K+1) = \dfrac{K+1}{R(K+1)} = \dfrac{K+1}{\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}\left(K+1 - \vartheta \frac{\sum_{i=0}^{K-1} \frac{\vartheta^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{K} \frac{\vartheta^i}{i!}}\right)}$

remarque : $\boxed{\Lambda(K+1) = \dfrac{K+1}{\frac{K+1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\frac{\vartheta^K}{K!}}{\sum_0^K \frac{\vartheta^k}{k!}}}}$

$= \Gamma_2 \dfrac{(K+1) \sum_0^K \frac{\vartheta^k}{k!}}{(K+1) \sum_0^K \frac{\vartheta^k}{k!} + \frac{\vartheta^{K+1}}{K!}}$

en mettant $K+1$ en facteur au numérateur et au dénominateur et $\frac{1}{\Gamma_2}$ au dénominateur on retrouve la formule 3.2.2

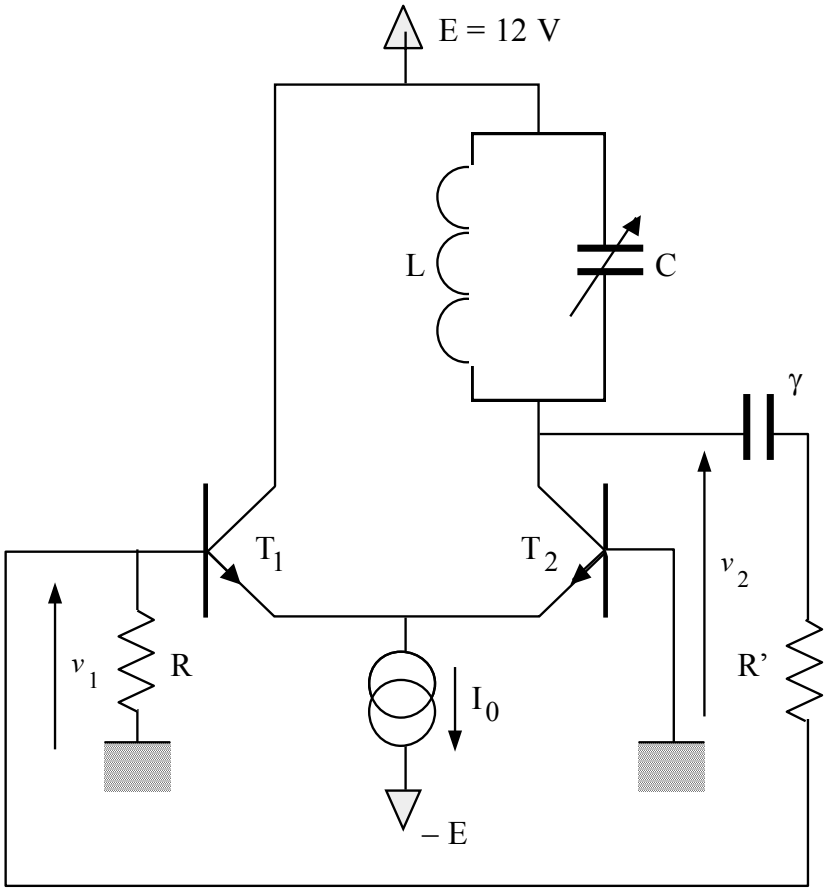
TELECOM-SUD-PARIS **2008 - 2009**

Module SF 11

SYSTÈMES ET FONCTIONS DE L'ÉLECTRONIQUE

CONTRÔLE DES CONNAISSANCES
1h30 AVEC DOCUMENTS

On désire réaliser la démodulation d'un signal radiophonique en modulation de fréquence en utilisant une boucle d'asservissement de phase. Le signal à démoduler est centré sur la fréquence intermédiaire du récepteur, f_0 = 10,7 MHz, fréquence centrale de la boucle. On propose d'étudier l'oscillateur commandé en tension (VCO) de cette boucle.
L'oscillateur est réalisé selon le montage suivant :



L'oscillateur fait intervenir deux transistors bipolaires alimentés par deux sources de tension continue +E et –E et par une source de courant continu I_0.

Le condensateur γ est un condensateur de liaison (impédance infinie en continu et impédance considérée comme nulle en régime d'oscillation).

Le condensateur C est lui un condensateur d'accord variable (capacité variable commandée électroniquement) et son impédance n'est pas nulle en régime d'oscillation. Il permet à l'oscillateur de fonctionner et de délivrer un signal sinusoïdal à la fréquence f_0 désirée.

1. Étude du régime continu

1.1. Représenter le schéma du montage en continu.

1.2. On suppose que les transistors sont en régime de fonctionnement normal avec un courant de base négligeable. On souhaite que le courant collecteur de chaque transistor soit égal à 1 mA. La tension V_{BE} de chaque transistor est alors supposée de l'ordre de 0,6 V.

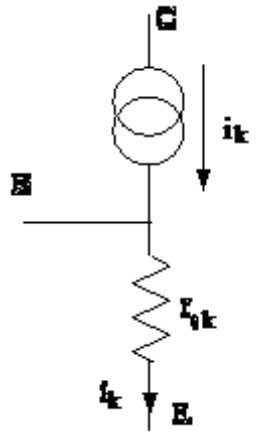
1.2.1. Calculer la valeur I_0 du courant débité par la source de courant.

1.2.2. Déterminer la valeur de la tension, par rapport à la masse, sur chaque électrode des transistors.

1.2.3. Vérifier que l'hypothèse du régime normal est légitime

2. Détermination des conditions d'oscillation

2.1. En régime de variations (ou d'oscillation), chaque transistor k est caractérisé par le schéma équivalent ci-contre.
Déterminer la valeur de r_{ek} intervenant dans le schéma



2.2. Donner le schéma du montage en régime d'oscillation.

2.3. Déterminer les conditions d'oscillation du système. Pour cela, on pourra, par exemple, procéder de la façon suivante :

- on exprimera la tension alternative v_2 en fonction de v_1 et en faisant intervenir les transistors T_1 et T_2 , l'admittance Y représentant la mise en parallèle de L et de C et les résistances

- on exprimera la tension alternative v_1 en fonction de v_2 mais sans faire intervenir les transistors T_1 et T_2 ,

- on écrira alors que les deux relations précédentes sont compatibles avec v_1 et v_2 non nulles.

2.4. On donne : L = 1,5 μH

Déterminer les valeurs de C et R pour que l'oscillateur fonctionne et délivre un signal sinusoïdal de fréquence f_0.

3. Commande de l'oscillateur

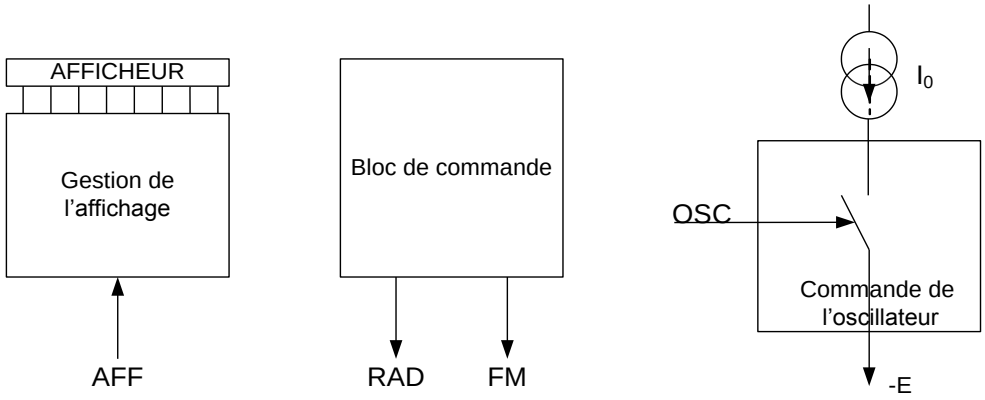
L'oscillateur fait parti d'un système audio complet ; il doit être activé lorsque les fonctions « radio » (commande :RAD) et « bande FM » (commande :FM) sont activées. Un afficheur renvoi alors l'information : Radio FM. Toutes les commandes sont actives sur un niveau logique '0'et sont reliées au port P1 d'un microcontrôleur AT89c51 selon la liste ci-dessous :

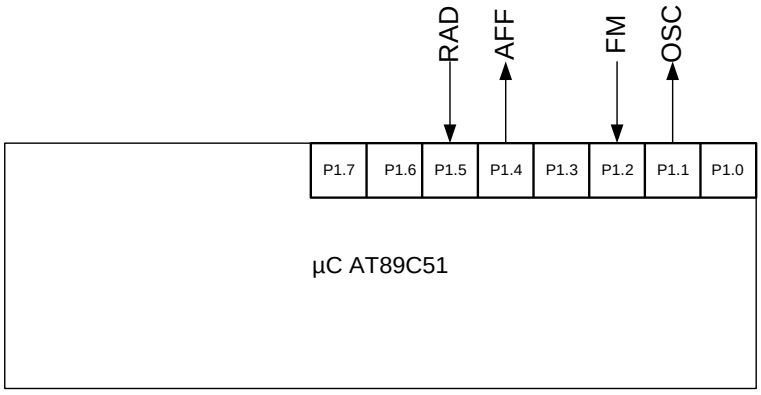
P1.1	OSC	= 0	mise en marche de l'oscillateur
		= 1	arrêt de l'oscillateur
P1.2	FM	= 0	bande FM sélectionnée
		= 1	bande FM non sélectionnée
P1.4	AFF	= 0	affichage demandé
		= 1	arrêt de l'affichage
P1.5	RAD	= 0	fonction radio activée
		= 1	fonction radio désactivée

Compléter le programme de gestion de l'oscillateur, détacher la feuille et la joindre à votre copie.

NB : les instructions à utiliser sont :

setb = mise à '1' du bit (set bit)
clr = mise à '0' du bit (clear)
jz adresse1 = si l'accumulateur contient 0, saut à l'adresse indiquée. [Jump if zero]
jnz adresse2 = si le contenu de l'accumulateur est différent de '0', saut à l'adresse indiquée . [Jump if not zero]





NOM	PRE

```
0       ;gestion de l'oscillateur et de l'affichage
1       osc         bit   ....
2       fm          bit   ....
3       aff         bit   ....
4       rad         bit   ....
5       debut:
6                   .... osc        ;arrêt de l'oscillateur
7                   setb  aff       ;arrêt de l'affichage
8       attente:                    ;boucle d’attente des commandes rad
et fm
9                   mov   .,..      ;transfert dans l'accumulateur du
contenu de P1
10                  anl   a,# .. h  ;masquage permettant de récupérer l’
état des commandes rad et fm
11                  ...   attente   ;tant que rad et fm ne sont pas
actives, attente de leur activation
12                  ...   osc       ;mise en marche de l'oscillateur
13                  ...   aff       ;envoi de la commande d'affichage
14      boucle:                     ;boucle d'attente d'une modification
des commandes rad ou fm
15                  mov   . ,. .    ;transfert dans l'accumulateur du
contenu de P1
16                  anl   a,# .. h  ;masquage permettant de récupérer
les états des commandes rad et fm
17                  ..    boucle    ;tant que rad ou fm ne sont pas
désactivées, attente d'une désactivation
18                  sjmp  .....     ;
19                  end
```

TELECOM-SUD-PARIS **2008 - 2009**

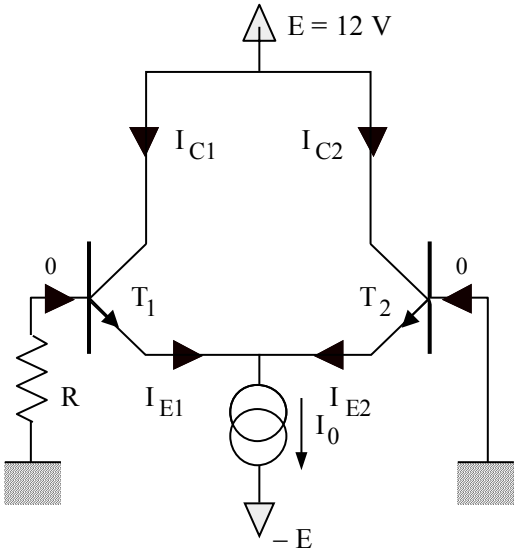
Module SF 11

SYSTÈMES ET FONCTIONS ÉLECTRONIQUES

CORRIGÉ DU CONTRÔLE DES CONNAISSANCES

1. Étude du régime continu

1.1.



1.2.1. Le courrant de $I_{C1} = I_{C2} = I_{E1} = I_{E2} = I_0/2$

$$\boxed{I_0 = 2\,\text{mA}}$$

1.2.2. En désignant par V_K la tension, par rapport à la masse sur l'électrode K, on a :

$$\boxed{V_{B1} = V_{B2} = 0\,\text{V}} \quad \boxed{V_{E1} = V_{E2} = 0,6\,\text{V}} \quad \boxed{V_{C1} = V_{C2} = 12\,\text{V}}$$

1.2.3. La diode base collecteur de chaque transistor est polarisée en inverse ($V_{BC} < 0$) et les deux transistors sont bien en régime de fonctionnement normal.

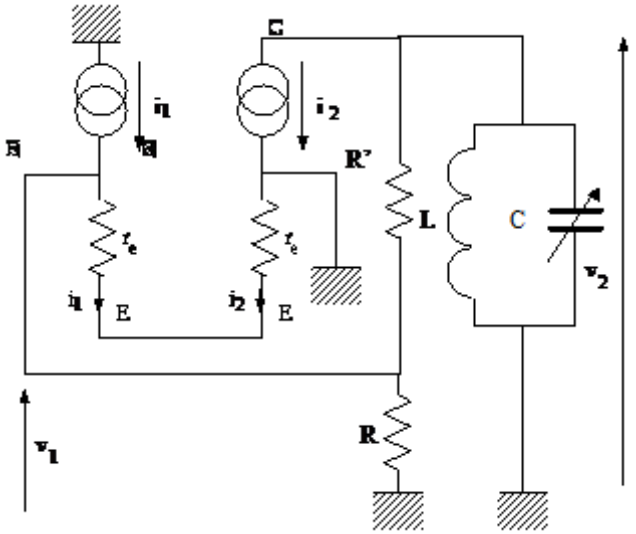
2. Étude du régime d'oscillation

2.1.

$$r_{ek} = \frac{k\,T}{q\,I_{Ek}}$$

$$\boxed{r_{e1} = r_{e2} = 26\Omega}$$

2.2.



2.3. $i_1 = - i_2$

$v_1 = 2\, r_e\, i_1 = - 2\, r_e\, i_2$

$$v_2 = - \frac{i_2}{Y + \dfrac{1}{R+R'}} = \frac{i_1}{Y + \dfrac{1}{R+R'}}$$

soit :

$$v_2 = \frac{R+R'}{2\, r_e} \; \frac{1}{1+Y(R+R')}\; v_1$$

En considérant le pont diviseur R, R', on a :

$$v_1 = \frac{R}{R+R'}\; v_2$$

On obtient alors : $v_2 = \dfrac{R}{2\, r_e}\; \dfrac{1}{1+Y(R+R')}\; v_2$ avec : $Y = jC\omega + 1/jL\omega$

L'équation précédente admet une solution v_2 non nulle, d'une part si Y est nulle et d'autre part si R est égal à $2\, r_e$.

Les conditions d'oscillation sont alors les suivantes :

$C\omega_0 - 1/L\omega_0 = 0$ soit **:** $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{R = 2\, r_e}$

2.4. On trouve alors :

$\boxed{C = 147\ pF}$ $\boxed{R = 52\ \Omega}$

3. Commande de l'oscillateur

NOM	**PRENOM**

```
0  ; gestion de l'oscillateur et de l'affichage
1  osc     bit   P1.1
2  fm      bit   P1.2
3  aff     bit   P1.4
4  rad     bit   P1.5
5  debut:
6        SETB osc     ; arrêt de l'oscillateur
7        setb  aff    ; arrêt de l'affichage
8  attente:           ; boucle d'attente des commandes rad et fm
9        mov   A,P1     ; transfert dans l'accumulateur du contenu de P1
10         anl  a,#24h   ; masquage permettant de récupérer l'état des commandes rad et fm
11         JNZ   attente   ; tant que rad et fm ne sont pas actives, attente de leur activation
12         CLR  osc     ; mise en marche de l'oscillateur
13         CLR  aff     ; envoi de la commande d'affichage
14   boucle:           ; boucle d'attente d'une modification des commandes rad ou fm
15         mov   A,P1   ; transfert dans l'accumulateur du contenu de P1
16         anl  a,#24h   ; masquage permettant de récupérer les états des commandes rad et fm
17         JZ  boucle   ; tant que rad ou fm ne sont pas désactivées, attente d'une désactivation
18         sjmp  debut ;
19         end
```

TELECOM SudParis - Tronc Commun - EI1

EXAMEN FINAL 1 DU MODULE PHY3502 (Rayonnement et Antennes)

20 Avril 2009 - Durée 1h30

Seul document autorisé : formulaire manuscrit (recto A4). Calculette autorisée.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Seuls les résultats numériques obtenus par application numérique à partir d'**expressions entièrement littérales** (et justifiées) sont pris en compte dans le barème.

(1,5)

Exercice 1 (Question de cours)

Qu'entend-on par "champ lointain" d'une antenne ? Quelles sont les propriétés du "champ lointain" qui ne sont pas vérifiées par le "champ proche" d'une antenne ?

(10)

Exercice 2 : Antenne constituée d'un dipôle demi-onde et d'un réflecteur plan.

Le champ rayonné par un dipôle demi-onde isolé centré sur l'origine O d'un système de coordonnées, placé le long de l'axe Oz de ce système de coordonnées, a pour expression :

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) = I_m \frac{\exp(-jkr)}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta}$$

où (r,θ,ϕ) sont les coordonnées sphériques du point d'observation. On admettra que ce champ est nul pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

1,5 1.1 - Donner l'expression de : a) la caractéristique vectorielle de rayonnement de cette antenne ; b) sa densité de puissance rayonnée par unité de surface ; c) sa densité de puissance rayonnée par unité d'angle solide.

2 1.2 - Quelles symétries possède le diagramme de rayonnement de cette antenne ? Quelles sont ses directions de rayonnement maximal ? De quel type de diagramme s'agit-il ?

On décide de placer cette antenne devant un plan réflecteur. On suppose que le plan xOz est réflecteur. On note d la distance entre le plan xOz et le dipôle (par rapport aux questions précédentes, le dipôle est translaté en $y = d$).

2 1.3 - En utilisant le principe des images, exprimer le champ rayonné par cette nouvelle antenne (plan + dipôle).

1 1.4 - Quelle est la plus petite valeur de la distance d qui permette d'obtenir un diagramme de rayonnement ayant pour direction de rayonnement maximal l'axe Oy ?

1 1.5 - Dans ce cas, donner l'allure (schématique) du diagramme de rayonnement (à partir des directions de maximum et de zéros de rayonnement).

On suppose que le dipôle isolé est adapté à l'impédance caractéristique du câble d'alimentation, $R_c = 75\Omega$. La présence du plan réflecteur modifie l'impédance d'entrée du dipôle qui devient $Z_d = (65 + 10j)\Omega$.

2,5 1.6 - Quel est l'effet de ce changement sur les performances de l'antenne ? Donner une réponse qualitative et quantitative (en dB).

(3)

Exercice 3 (Question de cours)

En utilisant la notion de "surface équivalente en réception" d'une antenne et sa relation avec le gain de l'antenne (qu'on admet sans la démontrer), démontrer la formule du bilan de liaison en espace libre. Définir explicitement chacune des grandeurs utilisées. En déduire la formule "logarithmique" du bilan de liaison.

(5,5)

Exercice 4

On souhaite établir une liaison hertzienne à 1800MHz, entre deux antennes de stations de base situées en milieu urbain, distantes de d =10km. On souhaite que la propagation ne soit pas perturbée par rapport à une propagation en espace libre, malgré la présence d'immeubles le long du trajet radio-électrique (à une distance des antennes supérieure à 500m). Quelle doit être la différence de hauteur minimale entre les antennes et ces immeubles ? On se placera dans le cas de l'atmosphère standard.

total:

(20)

NOTE FINALE = min(round(1,4 x note_sur_20); 4,5)

Contrôle CF1 - PHY3502 - 2008-2009. (2014/09)

Ex 1 : "Champ lointain" = champ rayonné à une distance $r > \frac{2D^2}{\lambda}$ de l'antenne (D = diamètre de la plus petite sphère contenant l'antenne $\simeq$ "plus grande dimension" de l'antenne)

Propriétés :

- $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ = produit d'une onde sphérique (ne dépendant que de la distance) et de la "fonction caractéristique vectorielle" de l'antenne, ne dépendant que de la direction (θ, φ).

- onde localement plane : $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{r} \wedge \vec{E}$

où $\hat{r}$ = direction de rayonnement (θ, φ).

η = impédance d'onde de l'air = 120π (Ω).

Ex2. 1a) $\vec{f}(\theta,\varphi) = I_m \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,\hat{\theta}$

1b) $\Pi = \dfrac{1}{2\eta}\|\vec{E}\|^2 = \dfrac{1}{2\eta}\dfrac{1}{r^2}|I_m|^2 \dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$

1c) $U = r^2\Pi$

2. Symétrie cylindrique autour de l'axe z (l'angle φ n'apparaît pas dans l'expression de $U(\theta,\varphi)$).

Symétrie par rapport au plan xOy (défini par $\theta = \frac{\pi}{2}$) :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\pi-\theta)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \\ \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \end{cases}$$

Valeurs de θ pour lesquelles $U(\theta,\varphi)$ est maximal :
$\theta = \frac{\pi}{2}$ (diagramme du dipôle $\lambda/2$).

⇒ plan xOy
Diagramme omnidirectionnel

3.

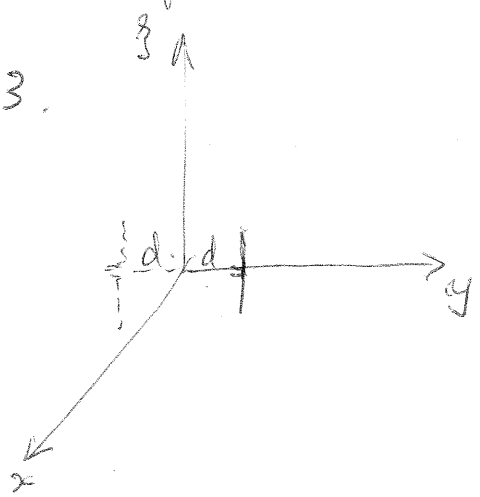


image : dipôle translaté en $z = -d$, de courant opposé.

Soit $\vec{E_0}$ le champ rayonné par le dipôle isolé placé à l'origine.

- Champ rayonné par le dipôle translaté en $y = d$:

$$\vec{E_0}\, e^{j\vec{k}\cdot d\hat{y}}$$

- ——— image :

$$-\vec{E_0}\, e^{j\vec{k}\cdot(-d\hat{y})}$$

Champ total : $2j\, \vec{E_0} \sin(\vec{k}\cdot d\hat{y})$

et $\vec{k}\cdot d\hat{y} = kd \sin\theta \sin\varphi$.

4. Axe Oy : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Oy est une direction de rayonnement max. du dipôle isolé ($\vec{E_0}$).

Il suffit que $|\sin(kd)| = 1$.

$$\Rightarrow kd = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4}\left[\frac{\lambda}{2}\right].$$

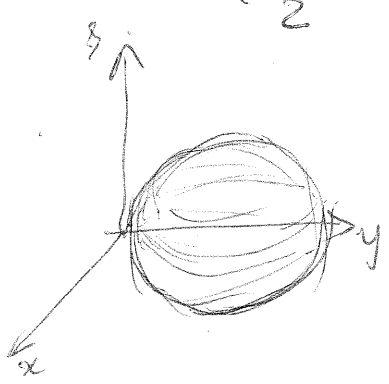
La distance la plus faible ($d = \frac{\lambda}{4}$) est préférable (encombrement).

5. Dir. des zéros de rayonnement :

$\theta = 0$ et π ($\perp \vec{E_0}$).

$\sin(kd \sin\theta \sin\varphi) = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi.\ \forall\varphi \Rightarrow \pm Oz$.

$\varphi = 0, \pi.\ \forall\theta \Rightarrow x Oz$.



Symétrie par rapport à xOy

6- Pertes par désadaptation ⇒ diminution du gain.

$G = k_{eff}\, D$

$k_{eff} = e_{cd} \cdot (1 - |\Gamma|^2)$

$|\Gamma|$ passe de 0 (adaptation) à $\left|\frac{Z_d - Z_e^*}{Z_d + Z_e}\right|$

⇒ le gain est multiplié à $1 - |\Gamma|^2$.

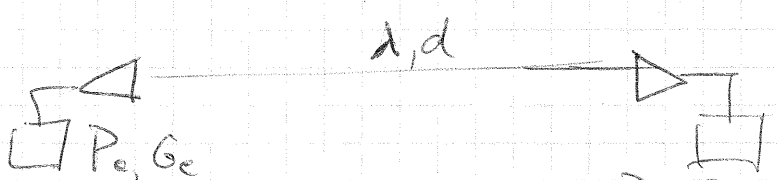
AN. $Z_d = 65 + j\sqrt{10}$; $Z_e = 75$

$$|\Gamma| = \left|\frac{-10 + j\sqrt{10}}{140 + j\sqrt{10}}\right| = \left|\frac{-1 + j}{14 + \sqrt{\ }}\right|$$

$$|\Gamma|^2 = \frac{2}{14^2 + 1}$$

$$1 - |\Gamma|^2 = \frac{14^2 - 1}{14^2 + 1} = 0,9898 \rightarrow -0,0443\ \text{dB}$$

EX3 :



P_e : puissance d'alimentation
G_E : gain de l'antenne d'émission
G_r : ——— de réception

P_r : puissance transmise au récepteur
$A_{eq,r}$: surface effective en réception de l'antenne de réception.

$$G_e = \frac{P}{P_e/4\pi d^2}$$ où p est la densité de puissance / m^2 rayonnée au voisinage de l'antenne de réception.

$$P_r = A_{eq,r} \cdot p \quad \text{avec} \quad A_{eq,r} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r .$$

$$\Rightarrow P_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \frac{P_e G_e}{4\pi d^2} = P_e G_e G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 = P_e \frac{G_e G_r}{A_{tel}}.$$

avec $A_{tel} = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2$: atténuation d'espace libre.

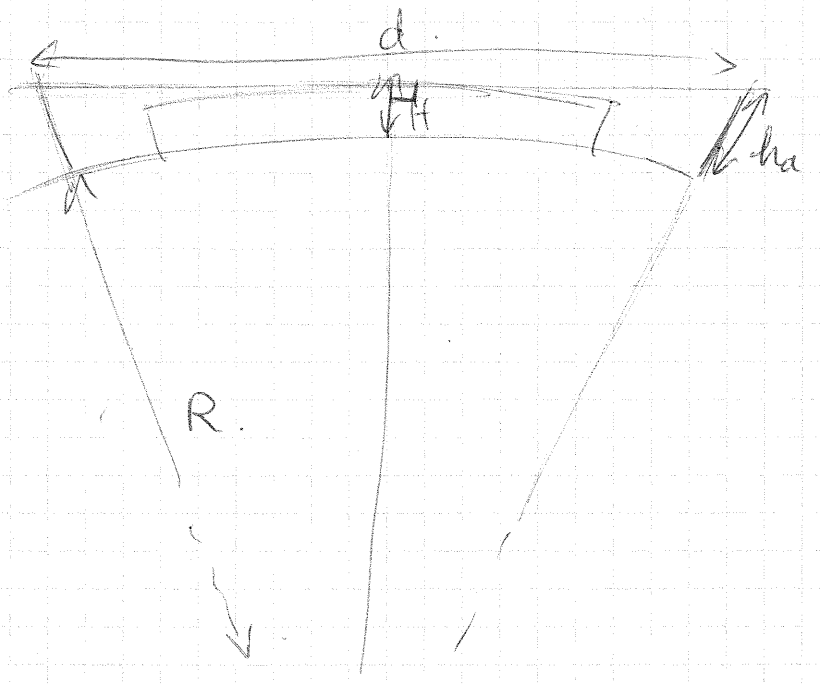
En logarithmique ($10\log_{10}$) :

$$P_r(dBW) = P_e(dBW) + G_e(dB) + G_r(dB) - 20\log_{10}\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right).$$

où $P_{(dBW)} = 10\log_{10} P(W)$

ou bien avec $P_r(dBm)$ et $P_e(dBm)$, où $P_{(dBm)} = 10\log_{10} P(mW)$

Ex4 :



On dégage l'axe radioélectrique au-dessus des immeubles, puis on dégage l'ellipsoïde de Fresnel.

- altitude minimale de l'axe radio-électrique : à mi-parcours.

On évalue **H** (cette altitude) en fonction de h_a (hauteur antennes). On note h_I la hauteur des immeubles.

$$(R+H)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (R+h_a)^2$$

$$2RH + H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2Rh_a + h_a^2$$

$H^2 \ll 2RH$ et $h_a^2 \ll 2Rh_a$.

$$\rightsquigarrow \quad H = h_a - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{1}{2R}$$

- rayon maximal de l'ellipsoïde de Fresnel : maximal au milieu du parcours $\Rightarrow$ contrainte la plus forte. En ce point :

$$r = \sqrt{\lambda \frac{(d/2)^2}{d}} = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda d}$$

Il faut qu'à mi-parcours l'altitude de l'axe radioélectrique soit supérieure à $h_I + r$

$\Rightarrow \quad H \geq h_I + r \quad \Rightarrow h.$

$$\Rightarrow \quad h_a - \frac{1}{2R}\left(\frac{d}{2}\right)^2 \geq h_I + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda d}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{h_a - h_I} \geq \frac{1}{2R}\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda d}$$

Δh = différence de hauteur entre les antennes et les immeubles

Sa valeur minimale pour assurer une propagation non perturbée est : $\frac{1}{2R}\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda d}$.

avec $\lambda = \frac{c}{f}$.

AN. $\lambda = \frac{3\times10^8}{1800\times10^6} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ $\quad (f = 1800\,MHz)$.

$d = 10\,km = 10\times10^3\,m$. $\quad R = \frac{4}{3}R_0$, $\quad R_0 = 6400\,km$.

$$\frac{1}{2R}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{10\times10^3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8}\,\frac{1}{6400\times10^3}$$

$$= \frac{25\times3}{8\times6{,}4} = 1{,}4648\,m.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda d} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10\times10^3}{6}} = \frac{50}{\sqrt{6}} = 20{,}4124\,m.$$

$\Delta h_{min} = 21{,}88\,m.$

Contrôle PG12 – 1ère session **16/03/2009**
Durée : 1h30

Les documents (polycopiés) et calculatrices sont autorisés.

Instructions : Afin de faciliter la correction, il vous est demandé de remettre sur des copies distinctes la première et deuxième partie.

Par ailleurs, 1 point de bonification est accordé à la qualité de présentation de votre copie.

Indiquez sur chaque copie (en haut à gauche) votre nom et prénom et encadrez vos résultats s.v.p.

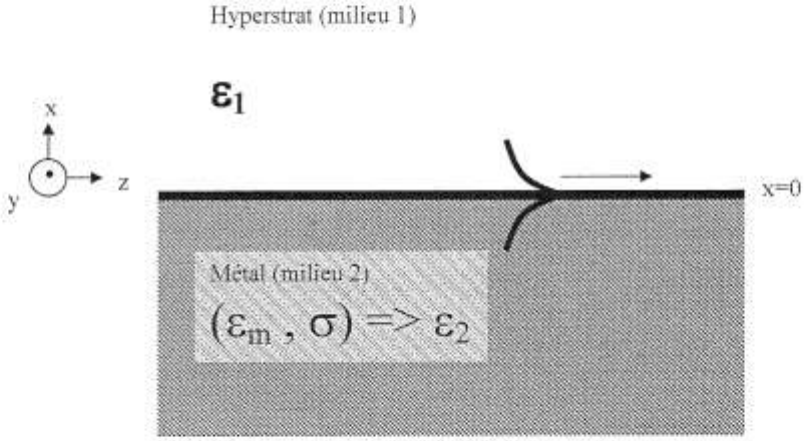
Exercice 1 : (6 points)

Dans cet exercice on cherche à déterminer si des modes guidés sont susceptibles d'exister à la surface d'un métal homogène non magnétique ($\mu=\mu_0$) et non parfait occupant l'espace x<0. Il vous est naturellement proposé de suivre la démarche employée au cours des BE d'optique guidée.

Les calculs se feront en polarisation TM (c.a.d. seule la composante Hy de **H** est non nulle). Pour cet état de polarisation, on peut montrer et on admettra que la composante du champ Ey est nulle en tout point de l'espace. Toutes les composantes des champs comporteront le terme $e^{j(\omega t-\beta z)}$. Du fait de l'invariance du problème par toute translation suivant l'axe y, il est clair que

$$\frac{\partial}{\partial y}=0$$

On appellera $\vec{E}^{(i)}$ et $\vec{H}^{(i)}$ les champs dans le milieu i (i=1,2).



1) Rappeler les équations de Maxwell pour des problèmes physiques ne comportant ni courant ni charge.

2) Les deux premières équations de Maxwell dans un métal non magnétique en régime harmonique sont :

$$rot\ (\vec{E}^{(2)}) + i\omega\mu_0 \vec{H}^{(2)} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$rot(\vec{H}^{(2)}) - i\omega\varepsilon_m \vec{E}^{(2)} - \vec{j} = \vec{0} \qquad (2)$$

avec $\vec{j} = \sigma\vec{E}^{(2)}$ où ε_m est la permittivité associée au métal et σ sa conductivité.

Montrer que dans le métal, l'équation (2) peut se rapporter à une équation de Maxwell harmonique **(2')** identique à celle d'un diélectrique (c.a.d. un milieu sans courant et similaire à celle que vous avez indiquée en question 1) à condition d'introduire une permittivité ε_2 que vous définirez (qui dépend de ε_m, ω et σ).

3) Grâce à un développement de l'équation (2'), et l'utilisation de la continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$, montrez que

$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial Hy}{\partial x}$ est continu à la traversée métal/hyperstrat. Remarquez et justifiez très succinctement que Hy est également continu à la traversée du métal/hyperstrat.

4) Exprimez l'équation différentielle que vérifie $H_y^{(i)}$ (Equation d'Helmholtz) en introduisant $\chi_i^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2$ (avec β la constante de propagation) dans chaque milieu. Résolvez l'équation différentielle trouvée en 1). Pour cela introduisez α_i dans chaque milieu. Du fait de l'ambigüité associée à la définition de la racine carrée d'un nombre complexe on choisira par définition $\alpha_i = \sqrt{\chi_i^2}$ avec α_i choisi de façon à avoir $Re(\alpha_i)>0$ (β sera à priori considéré comme complexe).
5) Parmi les solutions générales, précisez dans chacun des milieux la forme des solutions acceptables physiquement et permettant l'existence d'une onde guidée (donc localisée) au voisinage de l'interface métal/hyperstrat. Dessinez l'allure générale du champ H (en fonction de x)
6) On recherche les modes guidés dans une fenêtre spectrale située dans l'infrarouge. On peut alors négliger la partie réelle de ε_2 devant sa partie imaginaire. En utilisant les résultats des questions 3) et 5), déterminez analytiquement β, solution des modes guidés.
7) Ce guide, dit plasmonique, peut il avoir un comportement bi-mode ?

Exercice 2 (4 points): On considère un empilement de 3 couches diélectriques d'indice n2/n1/n3 avec n1=3.5, n2=2, n3=1.5. L'épaisseur de la couche d'indice n1 est 0.7µm

1) Tracez approximativement le diagramme de dispersion TE de ce guide d'onde en précisant toutefois les valeurs des trois premières épaisseurs normalisées de coupure et le domaine de définition de la constante de propagation (sur le graphique). Vos calculs seront détaillés et argumentés sur votre copie.
2) Définir et calculez le domaine de longueurs d'onde pour lequel le guide est monomode en TE.

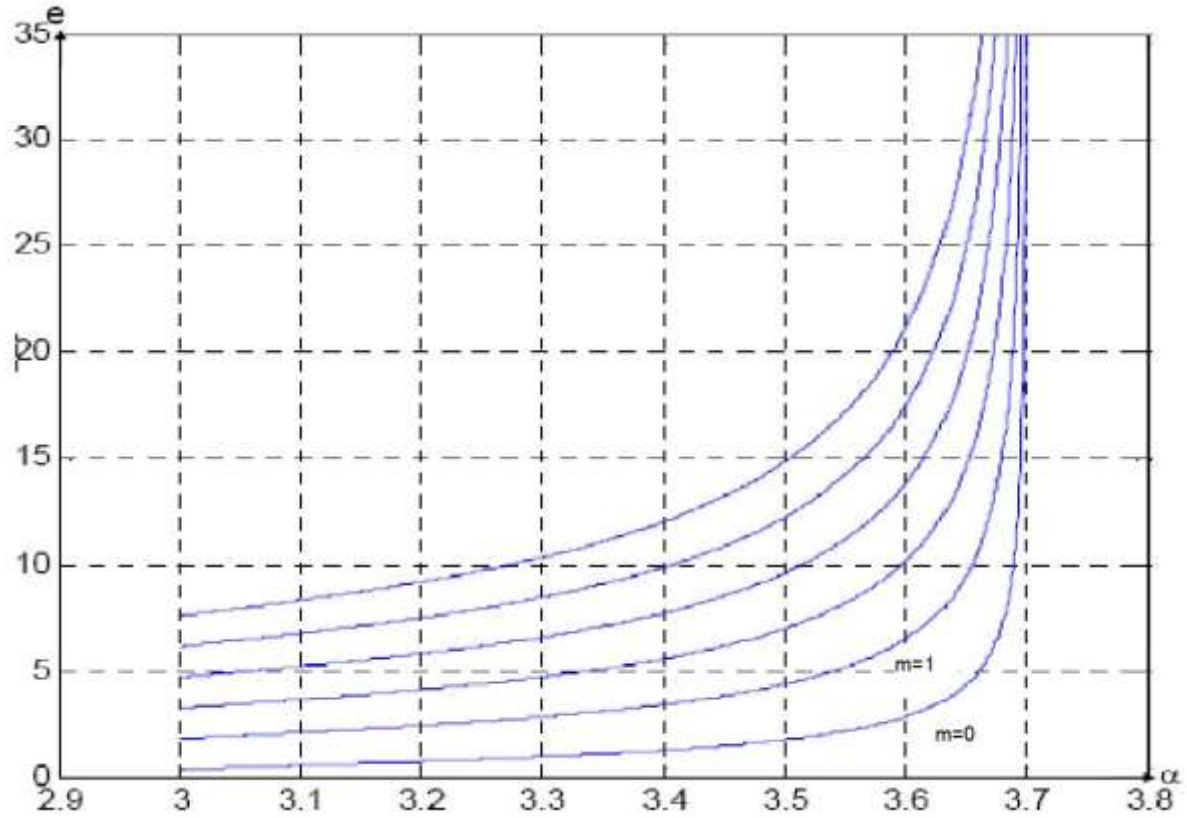
Exercice 1 : Diagramme de dispersion

Exercice un peu spéciale qui nécessitait d'avoir sous le coude le polycopié de corrigés d'exercices : au premier BE question3.7 on calculait une équation de dispersion en mode TE assez horrible :

$$e = \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 - \alpha^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2 - {n_2}^2}{{n_1}^2 - \alpha^2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2 - {n_3}^2}{{n_1}^2 - \alpha^2}} + m\pi \right]$$

Le graphe est fait pour différentes valeurs de m.

La question 3.8 de ce BE donnait alors les réponses recherchées.



1. On remarque que si α tend vers 3.7 toutes les courbes tendent vers +∞ :

Normal il y a le facteur $\frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 - \alpha^2}}$. Donc $n_1 = 3.7$

Ensuite $n_2 = 3$: les courbes s'arrêtent il n'y a plus de mode guidés.

2. D'après le cours, les épaisseurs normalisées de coupures correspondent aux valeurs de e auquelles apparaissent les modes respectifs TE_i

   Par ailleurs, on sait qu'à la coupure $\alpha(=\frac{\beta}{k_0})= n_2$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{{n_2}^2 - {n_3}^2}{{n_1}^2 - {n_2}^2}}$$

$${n_2}^2 - ({n_1}^2 - {n_2}^2)\left[\tan(e_0\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2})\right]^2 = {n_3}^2$$

$$n_3 = \sqrt{{n_2}^2 - ({n_1}^2 - {n_2}^2)\left[\tan(e_0\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2})\right]^2}$$

J'ai trouvé n_3 =2.759 on a bien $n_1 > n_2 > n_3$

3. e=$\frac{2\pi d}{\lambda_0}$.

   Sur le graphe si je trace pour une valeur de e fixée une ligne horizontale, j'aurai le nombre de modes guidées TE et quels modes.

   On veut le monomode. Nécessairement il faut que nous coupions la courbe m=0 et donc pas la courbe m=1.

   Ça définit un intervalle de valeurs pour e et donc pour λ =$\frac{2\pi d}{e}$

   Reste à calculer où à relever e1 :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{{n_2}^2 - {n_3}^2}{{n_1}^2 - {n_2}^2}} + \pi\right]$$

Je trouve $e_1 = 1.067$

Donc il n'y aura de monomode que pour 5.8μm<λ <22.5μm

Exercice 2 : onde de surfaces //le gras c'est de vecteurs

1. cf cours pour les eq de Maxwell mais avec **J**=0 (pas de courants) et ρ=0 (pas de charges.

   Ces équations ne sont valables que dans l'hyperstrat 1 (en gros c'est de l'air ou du vide) : il y a des charges surfaciques et un courant non nuls dans le metal 2.

   Notation conseillé : travailler avec **E** et **H** pour cet exo) :

   a) **rot**(**H**)=$\varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
   b) **rot**(**E**)=$-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$
   c) div(**H**)=0
   d) div(**E**)=0
   rq : a) ⇔ **rot**(**H**)=$\varepsilon_1 i\omega \mathbf{E}$

2.1 on réécrit l'equation 2' pour obtenir une équation similaire à ce qui fut obtenu en 1/ **rot**($\mathbf{H^{(2)}}$)= $\varepsilon_m i\omega \mathbf{E^{(2)}} + \sigma \mathbf{E^{(2)}}$

D'où $\varepsilon_2 = i\varepsilon_m \omega + \sigma$

2.2 les composantes tangentielles de E et H sont continues donc pour Hy c'est ok.

rot(**H**)= $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{pmatrix}$ (un rotationel, c'est juste un determinant..)

On projette sur l'axe (Oz) et on obtient :

$\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial H_y}{\partial x} = E_z$

Comme Ez est continue à la surface (x=0), $\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial H_y}{\partial x}$ est bien continue.

2.3 le grand classique mais on va le refaire, appliquez ce qu'on vous dit à la formule 1' : d'un coté

rot(rot(H))=**rot(**$\varepsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$**)**= $\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial t}$ **rot(**E**)** : j'ai le droit le rotationel, c'est des derivées spatiales.

Et **rot(**$E = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ d'après Maxwell => **rot(rot(H))**= $-\varepsilon_i \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

De l'autre **rot(rot(H))=grad**(div(**H**))- **∇^2(H)=** - **∇^2(H)**

- $\varepsilon_i \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$ +**∇^2(H)=0**

Rq: d'habitude $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ et $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

∇^2(H)= $\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + i^2\beta^2\mathbf{H}$

$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = i^2\omega^2 \mathbf{H}$

$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + (\varepsilon_i \mu_0 \omega^2 - \beta^2)\mathbf{H} = 0$

2.4 On pose $\chi_i{}^2 = \varepsilon_i \mu_0 \omega^2 - \beta^2$

On projette sur l'axe Oy :

$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \chi_i{}^2 H_y = 0$

et $\alpha_i = \sqrt{\chi_i{}^2}$ puisqu'a priori ε_i est complexe .

Les solutions sont du type :

$H_y = Ae^{\alpha_i x} + Be^{-\alpha_i x}$

(Oui, c'est long mais c'est toujours pareil).

On cherche des ondes guidées : il faut donc que l'énergie reste confinée à a surface du métal donc que les ondes soit à décroissance exponentielle dans le substrat ET que dans le métal pour qu'elle reste confinée à la surface.

Donc : milieu1. décroissance exponetielle χ_1 est imaginaire pur

milieu2. Décroissance exponentielle χ_2 est imaginaire pur aussi.

donc $\chi_2{}^2 < 0$

2.5 $\chi_2{}^2 = \varepsilon_2\, \mu_0\, \omega^2 - \beta^2$

Et $\varepsilon_2 = i\varepsilon_m\, \omega + \sigma$

D'après le sujet on néglige σ devant $i\varepsilon_m\, \omega$.

$\beta^2 \approx \sigma\mu_0\, \omega^2 - \chi_2{}^2$

Telecom SudParis

JUIN, 2009
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SIC3501)

Les calculatrices, notes de cours ou autres documents, ne sont pas autorisés.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
- Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
- Le barême prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 point par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
- Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par l'étoile .* en exposant. L'espérance mathématique est notée $\mathbb{E}\{.\}$.
- En annexe est donné un formulaire et un extrait de l'aide Matlab.

PARTIE A : Questions courtes et QCM (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Pour les questions 1 à 7, les réponses sont à donner sur la place réservée en p.10.
Deux ou trois lignes maximum sont demandées.
Pour les questions 8 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s)
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.11.

1. Quels sont les signaux dont la transformée de Fourier est périodique ? Existe-t-il une propriété duale ?

2. Comment se définit l'enveloppe complexe d'un signal à bande étroite $x(t)$? Faire un schéma dans le domaine des fréquences.

3. Donner la forme générale de la fonction de transfert en z d'un filtre (numérique) causal et de réponse impulsionnelle finie. Quelle est l'équation temporelle donnant la sortie en fonction de l'entrée ?

4. Que peut-on dire du domaine de convergence de la fonction de transfert en z d'un filtre stable ? Faire un schéma.

5. Qu'est-ce qu'un signal aléatoire ? Qu'appelle-t-on trajectoire d'un signal aléatoire ?

6. Qu'est-ce qu'un bruit blanc (à temps discret) ?

7. Quel est le lien entre la transformée de Fourier rapide (FFT), la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier à temps discret ?

suite ...

8. Sur un analyseur de spectre analogique (tel que celui que vous avez manipulé en TP) :

F une durée de balayage plus faible améliore toujours la résolution.

V une durée de balayage plus grande permet de choisir une bande passante plus faible du filtre d'analyse et d'améliorer la résolution.

F une bonne résolution est obtenue avec une bande passante large du filtre d'analyse.

F la résolution en fréquence dépend de la rapidité à laquelle varie le signal et pas de l'appareil.

9. Que renvoie la commande `fft([1 1 1 1])` sous le logiciel MATLAB ?

F Le vecteur `[1-i 1+i 1-i 1+i]`.

V Le vecteur `[4 0 0 0]`.

F Le vecteur `[1+i 1-i 1+i 1-i]`.

F Le vecteur `[1 1 1 1]`.

10. Que renvoie la commande `fftshift([1 2 3 4])` sous le logiciel MATLAB ?

V Le vecteur `[3 4 1 2]`.

F Le vecteur `[1 3 2 4]`.

F La transformée de Fourier discrète du vecteur `[1 2 3 4]`, avec des fréquences croissantes de $-\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}$.

F La transformée de Fourier discrète du vecteur `[1 2 3 4]`, avec des fréquences croissantes de 0 à 1.

11. Soit $\gamma_x(t)$ la fonction d'autocorrélation en puissance d'un signal $x(t)$ de puissance finie.

F $\gamma_x(t) \geq 0$ pour tout t.

F La puissance de $x(t)$ vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_x(t)|^2 \, dt$.

V $\gamma_x(t)$ peut être une fonction périodique.

V $\gamma_x(0) \geq |\gamma_x(t)|$ pour tout t.

12. Soit $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale de puissance d'un signal $x(t)$ de puissance finie.

F $\Gamma_x(0)$ est égal à la puissance du signal.

V $\Gamma_x(f)$ est positif.

F $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) \leq \Gamma_x(0)$.

F La puissance du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma_x(f)|^2 \, df$.

13. Un filtre à temps continu est stable au sens entrée bornée-sortie bornée si et seulement si :

F la réponse à un Dirac en entrée est de durée finie.

F sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$.

F sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \, dt < +\infty$.

V sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, dt < +\infty$.

suite ...

14. Pour définir une densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire, il faut :

F que toutes ses trajectoires soient d'énergie finie.

V qu'il soit stationnaire au sens large.

F que le module de sa transformée de Fourier soit borné.

F que sa transformée de Fourier soit ergodique.

15. $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la sortie d'un filtre stable de réponse en fréquence $H(f)$ excité en entrée par un signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ aléatoire stationnaire au sens large.

F $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large et sa transformée de Fourier à temps discret est $H(f)X(f)$ (où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$).

F $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire déterministe car le filtre est stable et sa transformée de Fourier à temps discret est $H(f)X(f)$ (où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$).

V $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large et sa densité spectrale de puissance est $|H(f)|^2\Gamma_x(f)$ (où $\Gamma_x(f)$ est la densité spectrale de puissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$).

F $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large. En tant que signal aléatoire, on ne peut pas définir sa densité spectrale de puissance.

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [L. Fathi] Dans un système de communication sans fil utilisant la technique d'accès par codes (CDMA), le récepteur en râteau (en anglais : Rake) contient un nombre de doigts qui correspond au :

F Nombre d'utilisateurs.

F Facteur d'étalement.

V Nombre de trajets dans le canal de propagation.

F Nombre de codes disponibles.

17. [L. Fathi] Pour un canal de propagation radio à multi-trajets, l'utilisation de plusieurs antennes en réception permet de :

F Réduire la complexité du récepteur.

F Réduire le nombre de trajets dans le canal de propagation.

V Combattre l'évanouissement (fading) du canal de propagation.

V Améliorer le rapport signal-à-bruit (RSB) à la sortie du récepteur.

18. [F. Barbaresco] Le Radar utilise, pour améliorer sa résolution distance, la technique de traitement du signal appelée "compression d'impulsion" qui consiste à l'émission à émettre une impulsion modulée linéairement en fréquence sur une bande de fréquences B et en réception à appliquer le "filtre adapté" (convolution avec une réplique inversée temporellement et conjuguée). La résolution en distance obtenue est alors proportionnelle :

F à la bande de fréquences de modulation B,

V à l'inverse de la bande de fréquences de modulation B,

F à la racine carrée de la bande de fréquences de modulation B.

suite ...

19. [P. Mège] On souhaite réaliser un système de radiocommunications permettant de transmettre le plus efficacement à la fois de la parole et des données.

F On optimise seulement pour le mode le plus contraignant.

F La parole numérisée ce n'est pas autre chose que des données. Il suffit donc que le système transmette efficacement les données et alors il transmettra aussi efficacement la parole.

V On optimise pour chacun des modes, parole et données, quitte à avoir un mode de tranmission un peu différent selon les types d'information transportées.

20. [P. Mège] Les systèmes de radio-diffusion évoluent vers le numérique. Aujourd'hui sur mon autoradio analogique je peux me rendre compte de l'effet du fading, Mon récepteur radio ne recoit rien ou presque rien s'il est dans un trou de fading. Quand j'aurai changé mon autoradio analogique pour un autoradio numérique, je ne me rendrai compte de rien

F parce que dans un système analogique les signaux reçus ne sont plus affectés de fading.

F parce que les systèmes de radiodiffusion numérique utilisent des bandes de fréquences où il n'y a pas de fading.

V le phénomène de fading sera toujours présent mais le traitement de signal utilisé à l'émission et à la réception permet de masquer ce phénomène pour le destinataire.

PARTIE B : exercice

21. Soit le signal aléatoire (complexe) à temps discret $x_n = e^{\imath(\omega n+\phi)}$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et ϕ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.

(a) Calculer $\mathbb{E}\{x_n\}$ et $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$. Que dire de la stationnarité ? Que vaut l'auto-corrélation $\gamma_x(k)$ du signal x_n ?

(b) Calculer :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n \quad \text{et :} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n x_{n-k}^*$$

Que peut-on dire concernant l'ergodicité ?

22. On considère maintenant le signal $y_n = e^{\imath(\omega_1 n+\phi_1)} + e^{\imath(\omega_2 n+\phi_2)}$ où ω_1, ω_2 sont fixés dans $\mathbb{R}$ et ϕ_1, ϕ_2 sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, 2\pi]$.

(a) y_n est-il stationnaire ? Calculer $\mathbb{E}\{y_n\}$ et $\gamma_y(k) \triangleq \mathbb{E}\{y_n y_{n-k}^*\}$.

(b) Calculer la puissance de y_n.

23. Soit le signal $z_n = y_n + e_n$ où e_n est un bruit blanc centré, indépendant de y_n et de puissance σ_e^2. Calculer la puissance, la moyenne et l'autocorrélation de z_n.

Eléments de réponse:

21. (a) $\mathbb{E}\{x_n\} = 0$; $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\} = e^{\imath\omega k}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large et $\gamma_x(k) = e^{\imath\omega k}$.

(b)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq 2\pi\ell, \ell \in \mathbb{Z} \\ e^{\imath\phi} & \text{si } \omega \neq 2\pi\ell, \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et :} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n x_{n-k}^* = e^{\imath\omega k}$$

Signal ergodique au sens large pour $\omega \neq 2\pi\ell, \ell \in \mathbb{Z}$.

22. (a) y_n est stationnaire, $\mathbb{E}\{y_n\} = 0$, $\gamma_y(k) = e^{\imath\omega_1 k} + e^{\imath\omega_2 k}$.

(b) $P_y = 2$

23. $P_z = 2 + \sigma_e^2$, $\mathbb{E}\{z_n\} = 0$; $\mathbb{E}\{z_n z_{n-k}^*\} = e^{\imath\omega_1 k} + e^{\imath\omega_2 k} + \sigma_e^2\delta_k$.

suite ...

PARTIE C : exercice

On considère $h_a(t)$ et $x_a(t)$, deux signaux analogiques déterministes continus, à bande limitée $[-B, B]$ et tels que $\int |h_a(t)|\,dt < \infty$ et $\int |x_a(t)|\,dt < \infty$.
Le but de l'exercice est de démontrer une équivalence entre filtrage analogique et numérique. Ceci est représenté par les deux schémas de la figure 1, sur lequel on souhaite obtenir le lien entre $y_a(\frac{n}{2B})$ et y_n.

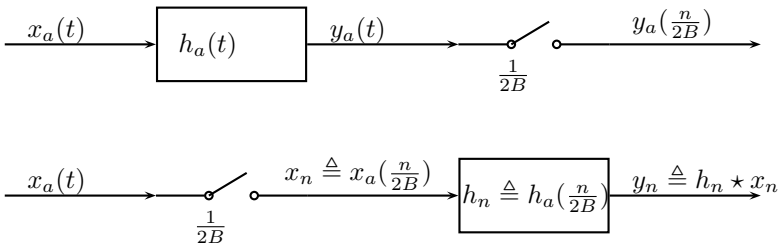


FIG. 1 – Filtrage analogique avant échantillonage / Filtrage numérique après échantillonnage

24. Le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$ est-il stable ?

25. Soit $y_a(t)$ le résultat du filtrage de $x_a(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$.

(a) Comment s'écrit $y_a(t)$ sous forme d'une intégrale ?

(b) On note $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$ les transformées respectives des signaux $x_a(t)$, $y_a(t)$ et $h_a(t)$ (la lettre f représente la fréquence). Quel est le lien entre $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$?

(c) En déduire :

$$y_a(t) = \int_{-B}^{B} e^{\imath 2\pi f t} H_a(f) X_a(f)\,df$$

26. On forme par échantillonnage les signaux $x_n \triangleq x_a(\frac{n}{2B})$ et $h_n \triangleq h_a(\frac{n}{2B})$. On suppose aussi pour des raisons techniques $\sum |x_n| < \infty$ et $\sum |h_n| < \infty$. La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est-elle vérifiée ?

27. y_n est le résultat du filtrage numérique de x_n par le filtre de réponse impulsionnelle h_n.

(a) Comment s'écrit y_n sous forme d'une somme ?

(b) On note $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$ les transformées respectives des signaux x_n, y_n et h_n ($\tilde{f}$ représente la fréquence normalisée). Quel est le lien entre $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$?

(c) En déduire que :

$$y_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\imath 2\pi n \tilde{f}} H(\tilde{f}) X(\tilde{f})\,d\tilde{f}$$

28. On admet pour les signaux $x_a(t)$ et $h_a(t)$ la formule sommatoire de Poisson est vérifiée :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a(f - 2Bk) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_a\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-\imath 2\pi k \frac{f}{2B}} \quad \text{et :} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} H_a(f - 2Bk) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-\imath 2\pi k \frac{f}{2B}}$$

(a) Rappeler la définition de $X(\tilde{f})$ et en déduire que l'on a pour $\tilde{f} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$: $X(\tilde{f}) = 2BX_a(2B\tilde{f})$. Quelle relation a-t-on entre $H(\tilde{f})$ et $H_a(f)$?

(b) En déduire $y_n = 2By_a(\frac{n}{2B})$ et la relation :

$$y_a\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right) x_a\left(\frac{n-k}{2B}\right)$$

suite ...

Eléments de réponse:

24. Oui.

25. (a) $y_a(t) = \int_{\mathbb{R}} h_a(\theta) x_a(t-\theta)\, d\theta$.
(b) $Y_a(f) = H_a(f) X_a(f)$.
(c)

$$y_a(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath 2\pi f t} Y_a(f)\, df = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath 2\pi f t} H_a(f) X_a(f)\, df = \int_{-B}^{B} e^{\imath 2\pi f t} H_a(f) X_a(f)\, df$$

L'égalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$ compte tenu des hypothèses (continuité et stabilité des signaux).

26. Oui, la condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée.

27. (a) $y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k y_{n-k}$
(b) $Y(\tilde{f}) = H(\tilde{f}) X(\tilde{f})$
(c) Formule de transformée de Fourier inverse

28. (a)

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{-\imath 2\pi k \tilde{f}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_a\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-\imath 2\pi k \tilde{f}} = 2B \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a(2B\tilde{f} - 2Bk)$$

Pour $\tilde{f} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, la dernière expression vaut $2BX_a(2B\tilde{f})$ compte tenu du support de $X_a(f)$. Idem $H(\tilde{f}) = 2BH_a(2B\tilde{f})$.
(b)

$$y_n = (2B)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\imath 2\pi n \tilde{f}} H_a(2B\tilde{f}) X_a(2B\tilde{f})\, d\tilde{f} = 2B \int_{-B}^{B} e^{\imath 2\pi \frac{n}{2B} f} H_a(f) X_a(f)\, df = 2B y_a\left(\frac{n}{2B}\right)$$

suite: ANNEXE(S)

1 Formulaire

Energie, puissance, corrélation, densité spectrale :

$$E_x \triangleq \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\,dt$$

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

$$R^e_{xy}(\tau) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)\,dt$$

$$R^p_{xy}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y^*(t-\tau)\,dt$$

$$S^e_{xx}(f) \triangleq \mathrm{TF}[R^e_{xx}(\tau)] = |X(f)|^2$$

$$S^p_{xx}(f) \triangleq \mathrm{TF}[R^p_{xx}(\tau)]$$

Convolution, filtrage, échantillonnage :

$$h(t)\star x(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} h(\theta)x(t-\theta)\,d\theta = x(t)\star h(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(\theta)h(t-\theta)\,d\theta$$

$$Y(f) = H(f)X(f) \qquad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

$$x_e(t) \triangleq x(t)\,\text{Ш}_{T_e}(t) \qquad X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_k X_e(f-\frac{k}{T_e})$$

cond. Shannon-Nyquist : $F_e \geq 2B$

Signal analytique, transformée de Hilbert, enveloppe complexe :

$$Z_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

$$z_x(t) = \left(\delta(t) + \imath\frac{1}{\pi t}\right)\star x(t)$$

$$z_x(t) = x(t) + \imath\widehat{x}(t)$$

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi t}\star x(t) \qquad \widehat{X}(f) = -\imath X(f)\mathrm{signe}(f)$$

$$\xi_x(t) = e^{-\imath 2\pi f_0 t}z_x(t) \qquad \Xi_x(f) = Z_x(f+f_0)$$

Temps discret :

$$X[z] \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n}$$

$$x_k = \frac{1}{\imath 2\pi}\oint_{\mathcal{C}} X[z]z^{k-1}\,dz = \sum_j \mathrm{Res}\left[X[z]z^{k-1}, p_j\right]$$

$$h_n \star x_n \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k} = x_n \star h_n \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k h_{n-k}$$

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^{q} b_j z^{-j}}{1+\sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}}$$

$$\leftrightarrow y_n + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{n-i} = \sum_{j=0}^{q} b_j x_{n-j}$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TFTC} : X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-\imath 2\pi f t}\,dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{\imath 2\pi f t}\,df$$

$$\mathrm{TFTD} : X(\tilde{f}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-\imath 2\pi \tilde{f} n} \qquad x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\tilde{f})e^{\imath 2\pi \tilde{f} n}\,d\tilde{f}$$

$$\mathrm{TFD} : X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\imath 2\pi \frac{k}{N} n} \qquad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\imath 2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$\mathbf{W} = \left[e^{-\imath\frac{2\pi}{N}(n-1)(p-1)}\right]_{n,p=1\ldots N}$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W}\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{W}\mathbf{W}^H = N\mathbf{Id}$$

Propriétés transformées Fourier / z / convolution :

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathrm{TF}} e^{-\imath 2\pi f t_0}X(f) \qquad e^{\imath 2\pi f_0 t}x(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f-f_0)$$

$$x(t)^* \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(-f)^* \qquad x(at) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{|a|})$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathrm{TF}} \imath 2\pi f X(f) \qquad tx(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} -\frac{1}{\imath 2\pi}\frac{dX(f)}{df}$$

$$x(t)\star y(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f)Y(f) \qquad x(t)y(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f)\star Y(f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\,dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2\,df$$

$$\delta(t)\star x(t) = x(t) \qquad x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} 1 \qquad \text{Ш}_T(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{T}\,\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f) \qquad e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\mathrm{TF}} e^{-\pi f^2}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{2}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \frac{1}{2\imath}(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0))$$

$$\mathbb{1}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} T\mathrm{sinc}(\pi f T)$$

$$x_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{Tz}} z^{-1}X[z] \qquad h_n \star x_n \xrightarrow{\mathrm{Tz}} H[z]X[z]$$

$$X(\tilde{f}) = X[e^{\imath 2\pi \tilde{f}}]$$

Signaux aléatoires :

$$P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x_n|^2\} \quad / \quad P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x(t)|^2\}$$

$$m_x \triangleq \mathbb{E}\{x_n\} \qquad R_{xy}(k) \triangleq \mathbb{E}\{(x_n - m_x)(y_{n-k}-m_y)^*\}$$

$$m_x \triangleq \mathbb{E}\{x(t)\} \qquad R_{xy}(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{(x(t)-m_x)(y(t-\tau)-m_y)^*\}$$

$$S_{xx}(f) \triangleq \mathrm{TF}[R_{xx}(k)]$$

suite ...

2 Extraits de l'aide Matlab

```
FFT Discrete Fourier transform.
   FFT(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.  For
   matrices, the FFT operation is applied to each column. For N-D
   arrays, the FFT operation operates on the first non-singleton
   dimension.

   FFT(X,N) is the N-point FFT, padded with zeros if X has less
   than N points and truncated if it has more.

   FFT(X,[],DIM) or FFT(X,N,DIM) applies the FFT operation across the
   dimension DIM.

   For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
   with elements
                    N
      X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                   n=1
   The inverse DFT (computed by IFFT) is given by
                    N
      x(n) = (1/N) sum  X(k)*exp( j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= n <= N.
                   k=1


FFTSHIFT Shift zero-frequency component to center of spectrum.
   For vectors, FFTSHIFT(X) swaps the left and right halves of
   X.  For matrices, FFTSHIFT(X) swaps the first and third
   quadrants and the second and fourth quadrants.  For N-D
   arrays, FFTSHIFT(X) swaps "half-spaces" of X along each
   dimension.

   FFTSHIFT(X,DIM) applies the FFTSHIFT operation along the
   dimension DIM.

   FFTSHIFT is useful for visualizing the Fourier transform with
   the zero-frequency component in the middle of the spectrum.

   Class support for input X:
      float: double, single
```

suite ...

suite ...

Nom: _____

Prénom: _____

1.

2.

3.

4.

5.

suite ...

6.

7.

Entourer les réponses justes.

8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	d
17.	a	b	c	d
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	
20.	a	b	c	

TELECOM et Management SudParis
Institut TELECOM
CONTROLE DE CONNAISSANCES

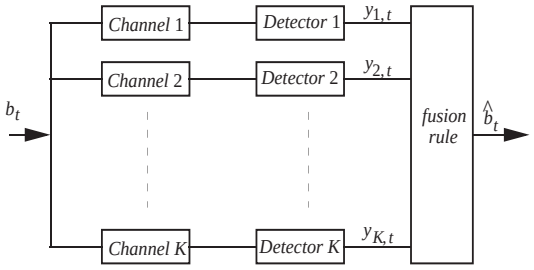
Module MAT3002 : Probabilités (premier partiel)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 25 Novembre 2008
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3)

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les quatre exercices sont indépendants.

1] **Probabilité d'erreur**

Considérons la transmission d'un élément binaire $B \in \{0,1\}$ qui est transmis à un récepteur par l'intermédiaire de K canaux binaires indépendants de probabilités d'erreur identiques p. Le récepteur détecte l'élément binaire $\widehat{B} \in \{0,1\}$ selon la règle majoritaire parmi les K éléments binaires reçus $Y_1, Y_2, ..., Y_K$. Calculer la probabilité d'erreur d'un tel récepteur pour $K = 2$, $K = 3$ puis pour K impair et K pair quelconques (pour K pair si le nombre d'éléments binaires 0 et 1 sont égaux parmi les K éléments binaires reçus $Y_1, Y_2, ..., Y_K$, le récepteur décide au hasard parmi 0 ou 1).



2] **Loi uniforme**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de loi de probabilité respectivement uniforme sur $[0, a_1]$ et uniforme sur $[0, a_2]$.

2.1] Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire (X_1, X_2).

2.2] Quelle est la probabilité $P(X_1 > X_2)$? (on pourra distinguer les cas $a_1 \leq a_2$ et $a_1 \geq a_2$. Commentaires ?

3] **Lois marginales et indépendance**

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples de variables aléatoires de densités de probabilité respectives :

$$f_{X_1,Y_1}(x,y) = (x+y)\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y) \quad \text{et} \quad f_{X_2,Y_2}(x,y) = (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y).$$

3.1] Donner les expressions des densités de probabilité des variables aléatoires X_1, Y_1, X_2 et Y_2.

3.2] Que peut on dire de l'indépendance de X_1 et Y_1 puis de X_2 et Y_2 ? Commentaires ?

4] **Produit de variables aléatoires**

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes. X est continue de densité de probabilité exponentielle ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$) et Y discrète avec $P(Y=+1) = p$ et $P(Y=-1) = 1-p$ où $\lambda > 0$ et $p \in [0,1]$.

4.1] Calculer la fonction de répartition, puis la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = XY$

4.2] Interpréter le cas particulier $p = \frac{1}{2}$

Correction très succincte du contrôle de connaissance de MAT3002 premier partiel

1] **Probabilité d'erreur**

Pour $K = 2$:

{erreur} = {erreur sur deux canaux} $\cup$ {erreur sur un seul canal $\cap$ malchance au tirage au hasard}. Et l'événement {erreur sur un seul canal $\cap$ malchance au tirage au hasard} est l'union des deux événements incompatibles {une erreur seule sur le premier canal $\cap$ malchance au tirage au hasard} et {une erreur seule sur le deuxième canal $\cap$ malchance au tirage au hasard}. Chacun de ces événement étant une intersection de deux événements indépendants (les erreurs sur les canaux sont indépendantes). Par suite :

$$P(\text{erreur}) = p^2 + 2p(1-p)\frac{1}{2} = p.$$

Pour $K = 3$: {erreur} = {erreur sur trois canaux} $\cup$ {erreur sur seulement deux canaux},
ce dernier événement se décompose en l'union de 3 événements incompatibles selon le choix du canal sans erreur. Par suite :

$$P(\text{erreur}) = p^3 + 3p^2(1-p).$$

Puis pour K impair quelconque : {erreur} $= \bigcup_{k=\frac{K+1}{2}}^{K}$ {erreur sur exactement k canaux}.

Par suite : $P(\text{erreur}) = \sum_{k=\frac{K+1}{2}}^{K} C_K^k p^k (1-p)^{K-k}$.

Enfin pour K pair quelconque

{erreur} $= \bigcup_{k=\frac{K}{2}+1}^{K}$ {erreur sur exactement k canaux} $\cup$ {erreur sur exactement $K/2$ canaux $\cap$ malchance au tirage au hasard}.

Par suite : $P(\text{erreur}) = \sum_{k=\frac{K}{2}+1}^{K} C_K^k p^k (1-p)^{K-k} + \frac{1}{2} C_K^{K/2} p^{K/2} (1-p)^{K/2}$.

2] **Loi uniforme**

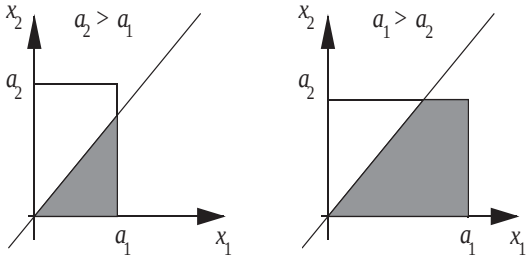
2.1] D'après l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2, $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ et d'après la définition de la loi uniforme $f_{X_1}(x) = \frac{1}{a_1}\mathbb{1}_{[0,a_1]}(x)$ et $f_{X_2}(x) = \frac{1}{a_2}\mathbb{1}_{[0,a_2]}(x)$. Par suite

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{a_1 a_2}\mathbb{1}_{[0,a_1[\times[0,a_2[}(x_1,x_2).$$

2.2] La probabilité $P(X_1 > X_2)$ est donnée par

$$P(X_1 > X_2) = \int\int_{\Delta} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1 dx_2$$

avec $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1,x_2)$ tel que $x_1 > x_2\}$. En distinguant les cas $a_1 \leq a_2$ et $a_1 \geq a_2$, on obtient géométriquement :



$$P(X_1 > X_2) = \begin{cases} \frac{1}{a_1 a_2}\frac{a_1^2}{2} = \frac{a_1}{2a_2} & a_1 \leq a_2 \\ \frac{1}{a_1 a_2}[a_1 a_2 - \frac{a_2^2}{2}] = 1 - \frac{a_2}{2a_1} & a_1 \geq a_2 \end{cases}$$

On remarque que pour $a_1 = a_2$, les variables aléatoires X_1 et X_2 ont même loi de probabilité et donc que $P(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$ par symétrie et puisque $P(X_1 = X_2) = 0$ (variable aléatoires continues). Pour $a_1 \leq a_2$, X_1 est plus concentrée vers 0 que X_2 et donc $P(X_1 > X_2) \leq \frac{1}{2}$. Au contraire pour $a_1 \geq a_2$, X_2 est plus concentrée vers 0 que X_1 et donc $P(X_1 > X_2) \geq \frac{1}{2}$.

3] **Lois marginales et indépendance**

3.1] Les densités de probabilité des variables aléatoires marginales X_1 et X_2 sont obtenues par :

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,Y_1}(x,y)dy = \left(\int_0^1 (x+y)dy\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = (x+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(x) \\ f_{X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2,Y_2}(x,y)dy = (x+\frac{1}{2})\left(\int_0^1 (y+\frac{1}{2})dy\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = (x+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(x), \end{aligned}$$

et par symétrie $f_{Y_1}(y) = (y+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ et $f_{Y_2}(y) = (y+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.

3.2] Par suite puisque $f_{X_1,Y_1}(x,y) \neq f_{X_1}(x)f_{Y_1}(y)$ et $f_{X_2,Y_2}(x,y) = f_{X_2}(x)f_{Y_2}(y)$, les variables aléatoires X_1 et Y_1 ne sont pas indépendantes, par contre X_2 et Y_2 sont variables aléatoires indépendantes. Nous remarquons ainsi que les lois de probabilités des variables aléatoires marginales ne caractérisent pas la loi de probabilité du couple.

4] **Produit de variables aléatoires**

4.1]

$$\begin{aligned} F_Z(z) &\overset{\text{def}}{=} P(Z < z) = P\left[((Z < z) \cap (Y = +1)) \cup ((Z < z) \cap (Y = -1))\right] \\ &= P\left((Z < z) \cap (Y = +1)\right) + P\left((Z < z) \cap (Y = -1)\right) \\ &= P\left((XY < z) \cap Y = +1)\right) + P\left((XY < z) \cap (Y = -1)\right) \\ &= P\left((X < z) \cap (Y = +1)\right) + P\left((-Y < z) \cap (Y = -1)\right) \\ &= P(X < z)P(Y = +1) + P(Y > -z)P(Y = -1) = pF_X(z) + (1-p)(1 - F_X(-z)) \end{aligned}$$

et par dérivation :

$$f_Z(z) = pf_X(z) + (1-p)f_X(-z) = p\lambda e^{-\lambda z}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(z) + (1-p)\lambda e^{\lambda z}\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(z)$$

4.2] Dans le cas particulier $p = \frac{1}{2}$, $f_Z(z) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|}$ qui est une fonction paire.

TELECOM et Management SudParis
Institut TELECOM
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module MAT3002 : Probabilités (deuxième partiel)
Durée : 1,5h
Sans document et sans calculatrice (une feuille manuscrite) A4 est autorisée
Date : 27 Février 2009
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3)

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les quatres exercices sont indépendants.

1] **Génération d'une suite de variables aléatoires**

On désire générer par des moyens informatiques une suite X_n de variables aléatoires indépendantes de loi de probabilité de Rayleigh (c'est à dire de densité de probabilité $f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$), à partir d'un générateur de suite U_n de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli à valeurs $\{0, 1\}$ équiprobables. Proposer au moins une méthode.

2] **Matrice de covariance**

On considère une variable aléatoire discrète réelle à deux dimensions $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la probabilité est définie par les probabilités 1/5 aux points (0,0) (1,0), (0,1), (-1,0) et (0,-1).
2.1] Quelle est la matrice de covariance $\mathbf{C}_X$ de cette variable aléatoire discrète bidimensionelle $\mathbf{X}$?
2.2] Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont elles non corrélées, indépendantes ?

3] **Théorème de transfert**

Soit a une constante réelle positive et X une variable aléatoire de densité de probabilité $f_X(x)$.
3.1] Donner l'expression de $\mathrm{E}(Y)$ pour $Y = \mathrm{Max}(X, a)$, en fonction de a et $f_X(x)$. (On pourra utiliser avec profit le théorème de transfert que l'on précisera).
3.2] Calculer $\mathrm{E}(Y)$ dans le cas particulier où $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty}[(x)$ Que remarque-t-on lorsque a tend vers 0 ?

4] **Calcul d'espérance mathématique, variance, coefficient de corrélation et d'espérance conditionnelle**

Soit (X, Y) une variable aléatoire bidimensionnelle de densité de probabilité :

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\ \mathbb{1}_{(x\geq 0)\cap(y\geq 0)\cap(x+y\leq 1)}$$

4.1] Déterminer les densités de probabilités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$. En déduire les expressions de $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$.
4.2] Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y et recalculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ à l'aide du théorème de transfert que l'on précisera.
4.3] Déterminer les densités de probabilité conditionnelles $f_{X/Y=y}(x)$ et $f_{Y/X=x}(y)$. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

4.4] Calculer $\mathrm{E}[X/Y=y]$ et en particulier $\mathrm{E}[X/Y=\frac{1}{2}]$. Quelle est la meilleure approximation $\widehat{X}$ de X comme fonction $g(.)$ de Y au sens de $\min_g \mathrm{E}([g(Y)-X]^2)$. Interprétation des résultats des questions 4.3] et 4.4] ?

Correction très succincte du contrôle de connaissance de MAT3002 deuxième partiel

1] **Génération d'une suite de variables aléatoires**

A partir de la suite U_n, on peut générer une suite de variables aléatoires V_n indépendantes de loi uniforme sur [0,1] en regroupant K valeurs successives de U_n.

$$V_n = \sum_{k=1}^{K} U_{nK+k} 2^{-k}$$

où K dépend du processeur disponible. On réalise en réalité une approximation car V_n est une variable aléatoire discrète à 2^K valeurs équiprobables régulièrement réparties dans $\{0, \frac{1}{2^K}, ..., \frac{k}{2^K}, 1-\frac{1}{2^K}\}$. Puis à l'aide de la méthode de la fonction de répartition inverse, puisque :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = (1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x),$$

on obtient la génération suivante :

$$X_n = \sigma\sqrt{-2\ln(1-V_n)}$$

où plus simplement $X_n = \sigma\sqrt{-2\ln(V_n)}$, car les variables aléatoires $1-V_n$ et V_n ont même loi de probabilité uniforme sur [0,1].

2] **Matrice de covariance**

2.1] $\mathrm{E}(X_1) = \sum_{k=1}^{5} x_{1,k}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$ et $\mathrm{E}(X_2) = \sum_{k=1}^{5} x_{2,k}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$,
puis
$\mathrm{E}(X_1X_2) = \sum_{k=1}^{5} x_{1,k}x_{2,k}\frac{1}{5} = 0$, $\mathrm{E}(X_1^2) = \sum_{k=1}^{5} x_{1,k}^2\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ et $\mathrm{E}(X_2^2) = \sum_{k=1}^{5} x_{2,k}^2\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$,
d'où
$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{E}(X_1X_2) - \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2) = 0$. Par suite :

$$\mathbf{C}_X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2] Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont non corrélées car $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Elles ne sont pas indépendantes car $P[(X_1=0)\cap(X_2=0)] \overset{\text{def}}{=} P[(X_1, X_2) = (0,0)] = \frac{1}{5} \neq P[X_1=0]P[X_2=0] = \frac{3}{5}\frac{3}{5}$.

3] **Théorème de transfert**

3.1] D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Max}(X,a) f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{a} a f_X(x)dx + \int_{a}^{+\infty} x f_X(x)dx = aF_X(a) + \int_{a}^{+\infty} x f_X(x)dx. \end{aligned}$$

3.2] Dans le cas particulier où $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$, $F_X(x) = (1-e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$. Alors :

$$\mathrm{E}(Y) = a(1-e^{-\lambda a}) + \int_{a}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = a(1-e^{-\lambda a}) + ae^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a} = a + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a}.$$

Lorsque a tend vers 0, $\mathrm{E}(Y)$ tend vers $\frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}(X)$. Ce qui est assez intuitif car dans ce cas la variable aléatoire Y converge en loi vers la variable aléatoire X.

4] **Calcul d'espérance mathématique, variance, coefficient de corrélation et d'espérance conditionnelle**

4.1] $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

De même :

$f_Y(y) = 2(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.

Par suite

$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$.

avec de même $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{6}$.

Par suite $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{18}$, de même $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{18}$.

4.2] Soit Δ, le domaine du plan défini par $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(x \geq 0) \cap (y \geq 0) \cap (x+y \leq 1)\}$. Alors en utlisant le théorème de transfert qui reporte le calcul d'espérance mathématique sur la variable aléatoire (X,Y), on obtient :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta} 2xdxdy = \int_0^1 2x\left[\int_0^{1-x} dy\right]dx = \frac{1}{3}$$

avec de même $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3}$.

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta} 2x^2dxdy = \int_0^1 2x^2\left[\int_0^{1-x} dy\right]dx = \frac{1}{6}$$

Le coefficient de corrélation entre X et Y est $\rho_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$ avec $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ où :

$$\mathrm{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta} 2xydxdy = \int_0^1 2x\left[\int_0^{1-x} ydy\right]dx = \frac{1}{12}.$$

Par suite :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{36} \quad \text{et} \quad \rho_{X,Y} = -\frac{1}{36}/\frac{1}{18} = -\frac{1}{2}.$$

4.3] $f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{1-y}\mathbb{1}_{[0,1-y]}(x)$ pour $y \in [0,1[$, c'est à dire une loi de probabilité uniforme sur $[0,1-y]$.

De même

$f_{Y/X=x}(y) = \frac{1}{1-x}\mathbb{1}_{[0,1-x]}(y)$ pour $x \in [0,1[$.

Puisque $f_{X/Y=y}(x) \neq f_X(x)$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

4.4]

$$\mathrm{E}[X/Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y=y}(x)dx = \frac{1-y}{2}$$

et en particulier $\mathrm{E}[X/Y=\frac{1}{2}] = \frac{1}{4}$.

Puisque d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathrm{E}([X-g(Y)]^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-g(y)]^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}[x-g(y)]^2\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx\right]f_Y(y)dy \quad \text{pour} \quad f_Y(y) \neq 0\end{aligned}$$

et que $\min_a \mathrm{E}([X-a]^2)$ a pour solution $a = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$, la "meilleure" fonction $g(.)$ sera donc donnée par $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y=y}(x)dx$ avec $f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Les résultats 4.3] et 4.4] peuvent se déduire de la remarque que la loi de probabilité de (X,Y) est de loi uniforme sur Δ.

TELECOM SudParis
Institut TELECOM
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module MAT3002 : Probabilités (2ème session)
Durée : 1,5h
Sans document et sans calculatrice (une feuille manuscrite) A4 est autorisée
Date : 30 Mars 2009
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3)

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les quatre exercices sont indépendants.

1] **Jeu stupide**

On considère une règle de longueur unité que l'on casse au hasard en deux parties. Après avoir modélisé cette expérience aléatoire, déterminer la probabilité que la plus petite partie soit inférieure à a (avec $a < 1/2$).

2] **Analyse de sang**

Dans une population une proportion p (en pratique $p \ll 1$) de personnes sont atteintes d'une maladie détectable par analyse sanguine. Pour réduire le coût de cette analyse, on se propose une méthode d'examen collectif selon la stratégie suivante. On analyse le sang mélangé de n personnes. Si le résultat est négatif aucune de ces n personnes n'est atteinte de cette maladie, sinon on fait l'analyse individuelle du sang de ces n personnes. Dans ce dernier cas on fait alors $n+1$ analyses.

Soit X_n, la variable aléatoire représentant le nombre d'analyses nécessaires par groupe de n personnes, calculer $\mathrm{E}(X_n)$. En déduire le nombre moyen d'analyses à effectuer par personne. En déduire l'existence d'une valeur minimale n_0 de ce nombre moyen n d'analyse.

3] **Variable aléatoire gaussienne**

3.1] Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée de variance unité. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +X & \text{si } X \in]-\infty,-2] \cup [-1,+1] \cup [2,+\infty[\\ -X & \text{si } X \in]-2,-1[\cup]1,2[\end{cases}$.

Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

3.2] Que peut on dire de la loi de probabilité de la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Y) ?

4] **Changement de variable aléatoire**

On considère la variable aléatoire (X,Y) de densité de probabilité

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y} \mathbb{1}_{0 \le x \le y}$$

où $\mathbb{1}_A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si la condition } A \text{ est satisfaite} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

4.1] Déterminer les densités de probabilités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$

4.2] On considère la variable aléatoire (U,V) définie par $U \stackrel{\text{def}}{=} X+Y$ et $V \stackrel{\text{def}}{=} X-Y$. Déterminer la densité de probabilité $f_{U,V}(u,v)$.

4.3] En déduire les densités de probabilités marginales $f_U(u)$ et $f_V(v)$.

Correction très succincte du contrôle de connaissance de MAT3002 2ème session

1] **Jeu stupide**

Cette expérience aléatoire peut être modélisée par l'espace probabilisé $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),P_u)$ où P_u désigne la probabilité uniforme sur $[0,1]$. Si l'on désigne par U cette variable aléatoire de loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$, la plus petite partie sera la variable aléatoire X définie par

$$X = \begin{cases} U & \text{si } 0 < U < 1/2 \\ 1-U & \text{si } 1/2 < U < 1 \end{cases}$$

et $P(X<a) = P\left((0<U<a)\cup(0<1-U<a)\right) = P\left((0<U<a)\cup(1-a<U<1)\right) = 2a$.

2] **Analyse de sang**

D'après l'énoncé X_n est une variable aléatoire prenant les valeurs 1 avec la probabilité $(1-p)^n$ et $n+1$ avec la probabilité $1-(1-p)^n$. Par suite :

$$\mathrm{E}(X_n) = 1\times(1-p)^n + (n+1)\times(1-(1-p)^n) = 1+n-n(1-p)^n$$

et le nombre moyen d'analyses à effectuer par personne est $\frac{\mathrm{E}(X_n)}{n} = 1+\frac{1}{n}-(1-p)^n$.

Puisque $1+\frac{1}{n}$ et $(1-p)^n$ sont respectivement des fonctions monotones décroissante et croissante de n, il existera une seule valeur n_0 qui minimisera ce nombre moyen d'analyse.

Une analyse numérique plus fine montrerait que cette valeur optimale n_0 est une fonction décroissante de p et ce nombre moyen optimal d'analyse $\frac{\mathrm{E}(X_{n_0})}{n_0}$ est une fonction croissante de p. Par exemple pour $p=0.1$ on a $n_0=4$ et $\frac{\mathrm{E}(X_{n_0})}{n_0}=0.4$, alors que pour $p=0.01$ on a $n_0=11$ et $\frac{\mathrm{E}(X_{n_0})}{n_0}=0.2$.

3] **Variable aléatoire gaussienne**

3.1] Puisque le changement de variable aléatoire $Y \stackrel{\text{def}}{=} g(X)$ est bijectif et que X est une variable aléatoire continue, nous pouvons appliquer la formule du changement de variable aléatoire.

$$f_Y(y) = |\frac{dy}{dx}|^{-1} f_X(x)_{|x=g^{-1}(y)} = |\pm 1|^{-1} f_X(\pm x) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

car $f_X(x)$ densité de probabilité Gaussienne centrée est paire.

3.2] Considérons la combinaison linéaire particulière $Z \stackrel{\text{def}}{=} X+Y$. Alors

$$Z = \begin{cases} 2X & \text{si } X \in]-\infty,-2]\cup[-1,+1]\cup[2,+\infty[\\ 0 & \text{si } X \in]-2,-1[\cup]1,2[\end{cases}.$$

Par suite Z est une variable aléatoire mixte prenant la valeur discrète 0 avec $P(Z=0) = P(X\in]-2,-1[\cup]1,2[) \neq 0$. Donc la variable aléatoire (X,Y) n'est pas de loi gaussienne à deux dimensions. D'ailleurs le support de cette variable aléatoire est concentrée sur les 5 demi-droites du plan (x,y) $y=x$ pour $x\in]-\infty,-2]$, $x\in[-1,+1]$ et $x\in[2,\infty[$ et $y=-x$ pour $x\in]-2,-1[$ ou $x\in\cup]1,2[$.

4] **Changement de variable aléatoire**

4.1] Les densités de probabilités marginales de X et Y sont :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \left(\int_x^{+\infty} e^{-y}dy\right)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \left(\int_0^{y} e^{-y}dx\right)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y) = ye^{-y}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y). \end{aligned}$$

4.2] D'après la formule du changement bijectif de variable aléatoire continue :

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right|} f_{X,Y}(x,y)_{|x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}} \\ &= \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right|} e^{-\frac{u-v}{2}} \mathbb{1}_{(u+v\leq 0)\cap(v\leq 0)} = \frac{1}{2} e^{-\frac{u-v}{2}} \mathbb{1}_{(u+v\leq 0)\cap(v\leq 0)} \end{aligned}$$

4.3] Par suite

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \left(\int_{-u}^{0} \frac{1}{2} e^{-\frac{u-v}{2}} dv\right) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(u) = e^{-u/2}(1-e^{-u/2}) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(u) \\ f_V(v) &= \left(\int_{-v}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{u-v}{2}} du\right) \mathbb{1}_{[-\infty,0[}(v) = e^{v} \mathbb{1}_{[-\infty,0[}(v). \end{aligned}$$